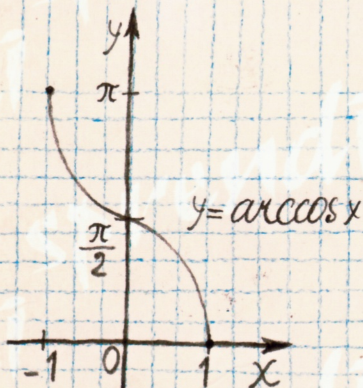
Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

11 KLASĖ

2 dalis

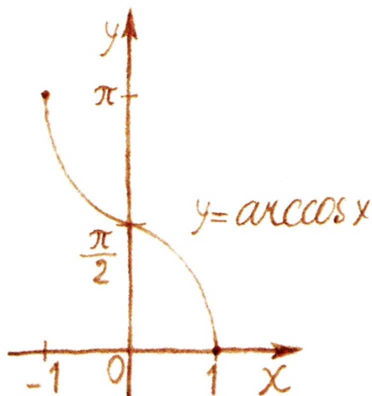


$$\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{3})+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Atsakymas. 1.

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais



11 KLASĖ

2 dalis

TEV
VILNIUS 2006

UDK 51(075.3)
Da238

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą kompiuteriu rinko ir maketavo *Laimutė Ališauskienė* ir
Nijolė Drazdauskienė

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–680–25–3

PRATARMĖ

Ši kontrolinių darbų knygelė skirta 11, 12 klasių mokytojams, taip pat mokiniams, pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą bei norintiems geriau pasiruošti kontroliniams darbams ir brandos egzaminui.

Kontrolinių darbų užduotys sudarytos pagal vadovėlio „Matematika 11“ (Leidykla TEV, 2002 m.) antrąją dalį.

Leidinyje yra 8 kontroliniai darbai, kuriuose sunkėjimo tvarka pateikiama po kelias užduotis. Paskutinė kiekvieno kontrolinio darbo užduotis skiriama geometrijos kurso kartojimui.

Kiekvieno kontrolinio darbo yra du variantai. Pirmasis variantas pateiktas su sprendimais, paaiškinimais ir atsakymais. Prie uždavinių sprendimų kai kur rasite stačiakampiuose įrėmintus svarbiausius teorinius faktus, susijusius su sprendžiamu uždaviniu. Analogiškas antrasis variantas skirtas pasitikrinti mokiniams, kaip jie suprato pirmojo varianto užduotis, — jo duoti tik atsakymai knygelės gale. Beje, knygelės gale pateikiami ir pirmojo varianto uždavinių atsakymai, todėl mokinys gali neskaityti sprendimų, o tik pasitikrinti atsakymo teisingumą.

Knygelė naudinga ir matematikos mokytojams organizuojant mokymo procesą, tikrinant mokinių žinias. Parinkdamas uždavinius pagal sudėtingumo laipsnį, mokytojas visą mokymo procesą gali individualizuoti.

Knygele galima naudotis einat kursą, kartojant išeitą medžiagą, ruošiantis kontroliniam darbui ar egzaminui.

Visi knygelėje pateikti uždaviniai atitinka standartų ir programų reikalavimus. Uždavinių sąlygas, sprendimus bei atsakymus patikrino leidyklos TEV specialistai.

Artimiausiu metu planuojame parengti ir išleisti analogiškas knygeles, atitinkančias vadovėlius „Matematika 12, I dalis“ ir „Matematika 12, II dalis“.

Autorės

TURINYS

FUNKCIJOS

15. Trigonometrinės funkcijos

15.1. Kampų matavimas laipsniais ir radianais
15.2. Posūkių kampai
15.3. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimai
15.4. Trigonometrinių funkcijų savybės
15.5. Redukcijos formulės

K12(15.1–15.5) 6

15.6. Funkcija $f(x) = \sin x$
15.7. Funkcija $f(x) = \cos x$

K13(15.6–15.7) 20

15.8. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$
15.9. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$

K14(15.8–15.9) 32

15.10. Trigonometrinės formulės
15.11. Dar daugiau trigonometrinių formulių

K15(15.10–15.11) 44

17. Skaičių sekos

17.1. Skaičių sekos ir jų reiškimo būdai
17.2. Didėjančios ir mažėjančios skaičių sekos
17.3. Aritmetinė progresija
17.4. Geometrinė progresija
17.5. Nykstamoji geometrinė progresija

K16(17.1–17.5) 58

ĮVYKIAI IR TIKIMYBĖS
19. Bandymai, baigtys, įvykiai
19.1. Bandymai ir baigtys
19.2. Atsitiktiniai įvykiai
19.3. Įvykių veiksmai
20. Įvykių tikimybės
20.1. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas
20.2. Tikimybių savybės
20.3. Pasitelkime kombinatoriką
20.4. Bendrasis įvykio tikimybės apibrėžimas
21. Sąlyginė tikimybė
21.1. Sąlyginės tikimybės apibrėžimas
21.2. Nepriklausomi įvykiai
K17(19.1–19.3, 20.1–20.4, 21.1–21.2) 72

PLOKŠTUMOS GEOMETRIJA
24. Trikampiai ir tiesės
K18(24) 88
25. Daugiakampiai
26. Apskritimas ir skritulys
K19(25–26) 100

Atsakymai 106

Trigonometrinės funkcijos

K12 (15.1–15.5)

1. Posūkio kampo α didumą išreikškite laipsniais. Nustatykite, kuriam koordinatiniam ketvirčiui priklauso posūkio kampas α, kai jis lygus:
a) $\frac{7}{4}\pi$;
b) $-\frac{11}{12}\pi$;
c) $-3{,}2\pi$.

2. a) Raskite skritulio centrinio kampo didumą laipsniais, kai skritulio spindulio ilgis yra 0,3 dm, o centrinį kampą atitinkančios išpjovos plotas lygus 4,5 cm^2. Atsakymą pateikite laipsnio tikslumu.
b) Raskite taisyklingojo šešiakampio kampų didumus laipsniais ir radianais.

3. Nustatykite, ar funkcija $y = f(x)$ yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.
a) $f(x) = x \cdot \sin x$;
b) $f(x) = \sin(3x) \cdot \operatorname{tg} x$;
c) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \cos x}{x^2 - 9}$.

4. Raskite trigonometrinės funkcijos mažiausią teigiamą periodą.
a) $y = \cos(4x)$;
b) $y = \sin(3x + 5)$;
c) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2\right)$.

5. Apskaičiuokite.
a) $\sin 810^\circ$;
b) $\cos(-720^\circ) - \operatorname{tg} 1800^\circ$;
c) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} + 2\cos\frac{31\pi}{3}$.

6. Įrodykite tapatybę.
a) $\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha$;
b) $\frac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)} = \cos\alpha$;
c) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi - \alpha)} - \frac{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 1$.

7. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8, o aukštinė, nubrėžta į pagrindą, lygi 3. Apskaičiuokite atstumą nuo trikampio pagrindo vidurio taško iki šoninės kraštinės.

1. Posūkio kampo α didumą išreikškite radianais. Nustatykite, kuriam koordinatiniam ketvirčiui priklauso posūkio kampas α, kai jis lygus:
a) 430°;
b) -2020°;
c) $0{,}32^\circ$.

2. a) Raskite trikampio kampų didumus laipsniais ir radianais, jei jų didumai sutinka kaip $2 : 3 : 5$.
b) Skritulio spindulio ilgis yra 6 dm. To skritulio išpjovos plotas lygus 16π cm^2. Raskite išpjovos kampo didumą laipsniais.

3. Nustatykite, ar funkcija $y = f(x)$ yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.
a) $f(x) = x^5 \cdot \cos x$;
b) $f(x) = \frac{x^6+3}{\sin^3 x}$;
c) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4-x^2}$.

4. Raskite funkcijos mažiausią teigiamą periodą.
a) $y = \mathrm{tg}(6x)$;
b) $y = \cos(2x - 7)$;
c) $y = \sin\left(\frac{2}{3}x - 1\right)$.

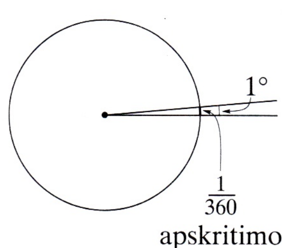
5. Apskaičiuokite.
a) $\sin 990^\circ$;
b) $\mathrm{tg}(-210^\circ) + \sin 495^\circ$;
c) $\cos(4{,}5\pi) - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$.

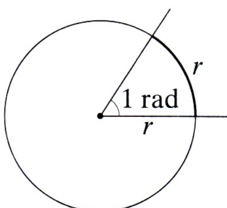
6. Įrodykite tapatybę.
a) $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)} = \mathrm{ctg}\,\alpha$;
b) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = -\cos\alpha$;
c) $\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

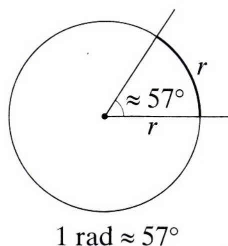
7. Trikampio ABC pusiaukraštinė AM statmena pusiaukraštinei BN. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai $AM = 6$, $BN = 4$.

1.

Kampų didumai gali būti nurodyti arba laipsniais, arba radianais.
Vieno laipsnio (1°) didumo centrinis kampas apskritime išpjauna $\frac{1}{360}$ apskritimo dalį.
Vieno radiano ($1\text{rad} = 1$) didumo centrinis kampas apskritime išpjauna lanką, lygų apskritimo spindulio ilgiui.







Ištiestinio kampo didumas: $180^\circ = \pi$ rad

- laipsniais — 180°;
- radianais — π rad.



$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad, $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 1$ rad.

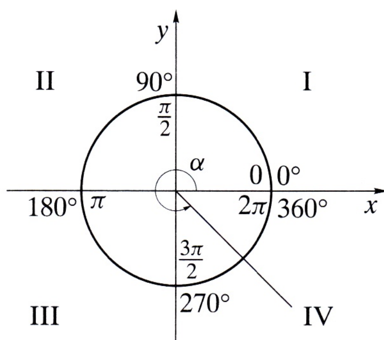
Kai kampo didumas nurodytas radianais (su raide π), tai to kampo didumą laipsniais randame vietoj π imdami 180°.

1a. $\frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4} \cdot 180^\circ = 315^\circ$.

Kadangi

$$270^\circ < 315^\circ < 360^\circ,$$

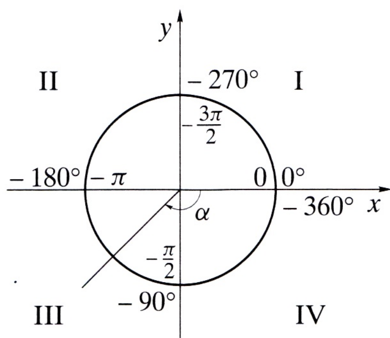
tai posūkio kampas $\alpha = 315^\circ$ priklauso IV ketvirčiui.



1b. $-\frac{11}{12}\pi = -\frac{11}{12} \cdot 180^\circ = -165^\circ$.

Kampas $\alpha = -165^\circ$ yra III ketvirčio posūkio kampas.

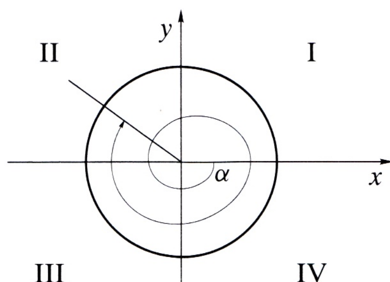
Pastaba. Neigiamas kampas skaičiuojamas pagal laikrodžio rodyklę.



1c. $-3{,}2\pi = -3{,}2 \cdot 180^\circ = -576^\circ$.

$$-576^\circ = -360^\circ + (-216^\circ) = -360^\circ + (-180^\circ) + (-36^\circ).$$

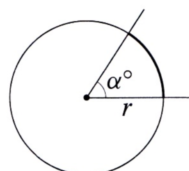
$\alpha = -576^\circ$ yra II ketvirčio posūkio kampas.



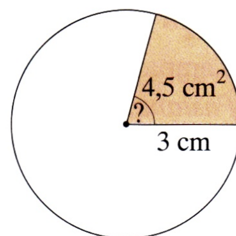
Atsakymas. a) IV ketvirtis; b) III ketvirtis; c) II ketvirtis.

2a. Raskite skritulio centrinio kampo didumą laipsniais, kai skritulio spindulio ilgis yra 0,3 dm, o centrinį kampą atitinkančios išpjovos plotas lygus 4,5 cm^2. Atsakymą pateikite laipsnio tikslumu.

Skritulio, kurio spindulys lygus r, plotas $S = \pi r^2$.
Skritulio išpjovos, kurios centrinis kampas lygus α, plotas
$S_{\text{išpj.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$



Duota: $r = 0{,}3\,\mathrm{dm}$, $S_{\text{išpj.}} = 4{,}5\,\mathrm{cm}^2$.
Rasti: α.
Sprendimas. Sąlygoje skritulio spindulio ilgis duotas decimetrais, o išpjovos plotas — kvadratiniais centimetrais. Prieš skaičiuojant, reikia suvienodinti matavimo vienetus: arba decimetrus versti centimetrais, arba kvadratinius centimetrus versti kvadratiniais decimetrais.



$$r = 0{,}3\,\mathrm{dm} = 3\,\mathrm{cm}.$$

Apskaičiuojame skritulio plotą:

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\,(\mathrm{cm}^2).$$

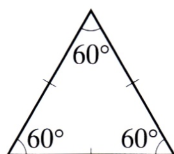
Remdamiesi formule $S_{\text{išpj.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$, apskaičiuojame α:

$$4{,}5 = \frac{9\pi}{360} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{4{,}5 \cdot 40}{\pi}, \quad \alpha = \frac{180}{\pi}, \quad \alpha \approx \frac{180}{3{,}14} \approx 57^\circ.$$

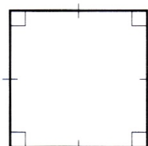
Atsakymas. 57°.

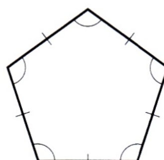
2b. Raskite taisyklingojo šešiakampio kampų didumus laipsniais ir radianais.

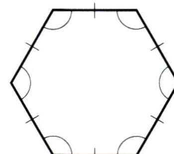
Daugiakampis, kurio visos kraštinės yra lygios ir visi kampai yra lygūs, vadinamas taisyklinguoju.



Lygiakraštis trikampis


Kvadratas


Taisyklingasis penkiakampis


Taisyklingasis šešiakampis

...

Bet kokio n-kampio visų kampų didumų sumą galima apskaičiuoti remiantis formule:
$(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Sprendimas. Apskaičiuojame šešiakampio ($n = 6$) visų kampų didumų sumą:
$(6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Kadangi šešiakampis yra taisyklingasis, tai visi jo kampai yra lygūs — turi po vienodai laipsnių. Vieno jo kampo didumas laipsniais:

$$720^\circ : 6 = 120^\circ.$$

Randame to kampo didumą radianais.
Kadangi $180^\circ = \pi\,\text{rad}$, tai $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad, o 120° kampo didumas radianais 120 kartų didesnis:

$$\frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2}{3}\pi.$$

Atsakymas. 120°, $\frac{2}{3}\pi$ rad.

3.

> Funkcija $y = f(x)$ vadinama *lygine*, jei su kiekvienu x iš apibrėžimo srities teisinga lygybė: $f(-x) = f(x)$.
>
> Funkcija $y = f(x)$ vadinama *nelygine*, jei su kiekvienu x iš apibrėžimo srities teisinga lygybė: $f(-x) = -f(x)$.
>
> Lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas ašies Oy atžvilgiu.
> Nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško O atžvilgiu.
>
> Iš trigonometrinių funkcijų $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, funkcija $y = \cos x$ yra lyginė, visos kitos — nelyginės.

3a. $f(x) = x \cdot \sin x$.

Raskime $f(-x)$ ir pažiūrėkime, ar teisinga kuri nors iš lygybių $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x).$$

Kadangi $\sin(-x) = -\sin x$, tai

$$f(-x) = -x \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x.$$

Matome, kad $f(-x) = f(x)$, — funkcija lyginė. *Atsakymas*. Lyginė.

3b. $f(x) = \sin(3x) \cdot \operatorname{tg} x$.

$$f(-x) = \sin\big(3 \cdot (-x)\big) \cdot \operatorname{tg}(-x).$$

Kadangi $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, tai

$$f(-x) = -\sin(3x) \cdot (-\operatorname{tg} x) = \sin(3x) \cdot \operatorname{tg} x.$$

Matome, kad $f(-x) = f(x)$, — funkcija lyginė. *Atsakymas*. Lyginė.

3c. $f(x) = \frac{x^2 \cdot \cos x}{x^2 - 9}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \cdot \cos(-x)}{(-x)^2 - 9} = \frac{x^2 \cdot \cos x}{x^2 - 9}.$$

Kadangi $f(-x) = f(x)$, tai funkcija yra lyginė.

Atsakymas. Lyginė.

4.

> Funkcijos $y = f(x)$ mažiausiu teigiamu periodu vadinamas toks mažiausias teigiamas skaičius T, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities teisinga lygybė
> $f(x \pm T) = f(x)$.
>
> Jei toks skaičius T yra, tai funkcija vadinama periodine; jei tokio skaičiaus nėra — neperiodine.
>
> Funkcijų $y = \sin x$, $y = \cos x$ mažiausias teigiamas periodas yra 2π.
>
> Funkcijų $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ mažiausias teigiamas periodas yra π.
>
> $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $\quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x$,
> $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, $\quad \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$; čia $n \in \mathbf{Z}$.

4a. $y = \cos(4x)$.

I būdas. Ieškome tokio mažiausio teigiamo skaičiaus T, kad su visais x būtų teisinga lygybė:

$$\cos\big(4(x + T)\big) = \cos(4x).$$

Kadangi

$$\cos\big(4(x + T)\big) = \cos(4x + 4T),$$

tai ieškome T, su kuriuo

$$\cos(4x + 4T) = \cos(4x).$$

Pažymėkime $4x = a$.
Turime

$$\cos(a + 4T) = \cos a.$$

Žinome, kad funkcijos $y = \cos a$ mažiausias teigiamas periodas yra 2π.
Vadinasi,

$$4T = 2\pi, \quad T = \frac{\pi}{2}.$$

II būdas. Funkcijos

$$y = k\cos(\omega x + b) \quad \text{arba} \quad y = k\sin(\omega x + b)$$

mažiausią teigiamą periodą T_0 galima rasti remiantis formule

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Kadangi duotoji funkcija yra $y = \cos(4x)$, tai $\omega = 4$. Vadinasi,

$$T_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{\pi}{2}$.

4b. $y = \sin(3x + 5)$.

I būdas. Ieškome T, su kuriuo

$$\sin\big(3 \cdot (x + T) + 5\big) = \sin(3x + 5).$$

Pertvarkome reiškinį $\sin\big(3 \cdot (x + T) + 5\big)$:

$$\sin\big(3 \cdot (x + T) + 5\big) = \sin(3x + 3T + 5) = \sin(3x + 5 + 3T).$$

Turime:

$$\sin(3x + 5 + 3T) = \sin(3x + 5).$$

Pažymėję $3x + 5 = a$, gauname:

$$\sin(a + 3T) = \sin a.$$

Kadangi funkcijos $y = \sin a$ mažiausias teigiamas periodas yra 2π, tai

$$3T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{3}.$$

II būdas. Taikome mažiausio teigiamo periodo formulę $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$y = \sin(3x), \quad \omega = 3,$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{3}.$$

Atsakymas. $\frac{2\pi}{3}$.

4c. $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2\right)$.

I būdas. Ieškome T, su kuriuo

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x+T}{4} - 2\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2\right).$$

Pertvarkome reiškinį $\operatorname{ctg}\left(\frac{x+T}{4} - 2\right)$:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x+T}{4} - 2\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} + \frac{T}{4} - 2\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2 + \frac{T}{4}\right).$$

Turime:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2 + \frac{T}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2\right).$$

Pažymėję $\frac{x}{4} - 2 = a$, gauname:

$$\operatorname{ctg}\left(a + \frac{T}{4}\right) = \operatorname{ctg} a.$$

Kadangi funkcijos $y = \operatorname{ctg} a$ mažiausias teigiamas periodas yra π, tai

$$\frac{T}{4} = \pi, \quad T = 4\pi.$$

II būdas. Funkcijos

$$y = k\operatorname{tg}(\omega x + b) \quad \text{arba} \quad y = k\operatorname{ctg}(\omega x + b),$$

mažiausią teigiamą periodą T_0 galima rasti remiantis formule

$$T_0 = \frac{\pi}{\omega}.$$

Kadangi duotoji funkcija yra $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - 2\right)$, tai $\omega = \frac{1}{4}$. Vadinasi,

$$T_0 = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi.$$

Atsakymas. 4π.

5.

$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi n) = \sin x,\ n \in \boldsymbol{Z};$
$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x,\ n \in \boldsymbol{Z};$
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x, \quad \mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}\, x,\ n \in \boldsymbol{Z};$
$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x, \quad \mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}\, x,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\, x =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\, x =$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5a. $\sin 810^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1.$

Atsakymas. 1.

5b. $\cos(-720^\circ) - \mathrm{tg}\, 1800^\circ.$

Pirmiausia apskaičiuokime atskirai $\cos(-720^\circ)$ ir $\mathrm{tg}\, 1800^\circ$:

$$\cos(-720^\circ) = \cos(-2 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1,$$
$$\mathrm{tg}\, 1800^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ \cdot 10 + 0^\circ) = \mathrm{tg}\, 0^\circ = 0.$$

Taigi

$$\cos(-720^\circ) - \mathrm{tg}\, 1800^\circ = 1 - 0 = 1.$$

Atsakymas. 1.

5c. $\mathrm{tg}\, \frac{10\pi}{3} + 2\cos \frac{31\pi}{3}.$

Nurodymas. Čia galima skaičiuoti radianais, o galima verstis laipsniais.

I būdas.

$$\mathrm{tg}\, \frac{10\pi}{3} = \mathrm{tg}\, \frac{10 \cdot 180^\circ}{3} = \mathrm{tg}\, 600^\circ = \mathrm{tg}(3 \cdot 180^\circ + 60^\circ) = \mathrm{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$2\cos \frac{31\pi}{3} = 2\cos \frac{31 \cdot 180^\circ}{3} = 2\cos 1860^\circ = 2\cos(5 \cdot 360^\circ + 60^\circ) =$$
$$= 2\cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Vadinasi,

$$\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}+2\cos\frac{31\pi}{3}=\sqrt{3}+1.$$

II būdas.

$$\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi\right)=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3};$$

$$2\cos\frac{31\pi}{3}=2\cos\left(\frac{31\cdot 2\pi}{3\cdot 2}\right)=2\cos\left(5\frac{1}{6}\cdot 2\pi\right)=2\cos\left(5\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{6}\right)=$$
$$=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

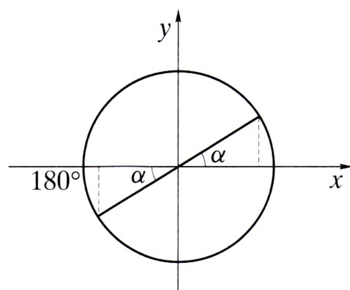
Atsakymas. $\sqrt{3}+1.$

6.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

6a. $\frac{\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

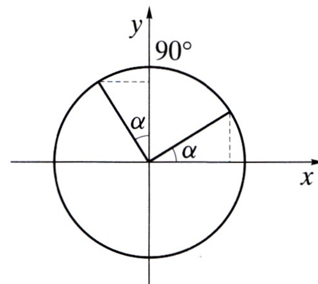
Pertvarkykime kairiosios pusės reiškinį:
1) $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha;$



2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

3) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

4) $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$.



Vadinasi,

$$\frac{\cos(180^\circ + \alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90^\circ + \alpha)} =$$

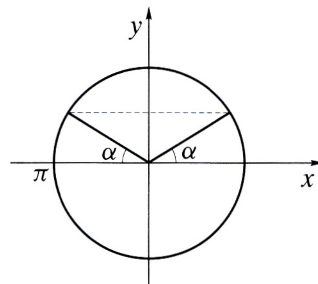
$$= \frac{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

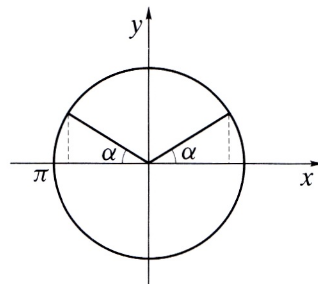
Gavome, kad kairiosios pusės reiškinys lygus dešiniosios pusės reiškiniui. Tapatybė įrodyta.

6b. $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)} = \cos\alpha.$

Pertvarkome kairiosios pusės reiškinį:

1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;





2) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Vadinasi,

$$\frac{\sin(\pi - \alpha)\cdot\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cdot\cos(\pi - \alpha)} =$$

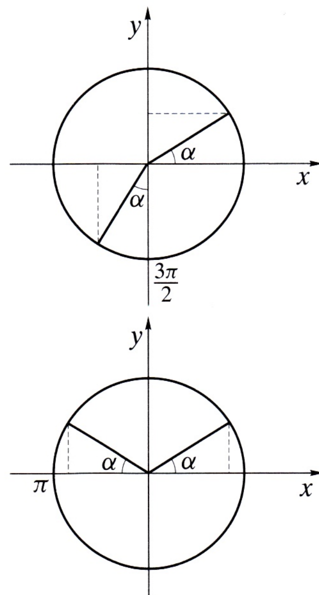
$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha\cdot(-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \sin\alpha : \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha.$$

Kairiosios pusės reiškinys lygus dešiniosios pusės reiškiniui. Tapatybė įrodyta.

6c. $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)} - \dfrac{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} + \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = 1.$

Pertvarkome kairiąją pusę:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha;$



2) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha;$

3) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha;$

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$

5) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$

Vadinasi,

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)} - \frac{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} + \operatorname{tg}(\pi-\alpha) =$$
$$= \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha + 1 - \operatorname{tg}\alpha = 1.$$

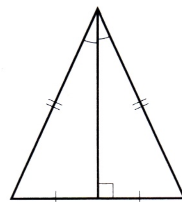
Kairiosios pusės reiškinys lygus dešiniosios pusės reiškiniui. Tapatybė įrodyta.

7. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8, o aukštinė, nubrėžta į pagrindą, lygi 3. Apskaičiuokite atstumą nuo trikampio pagrindo vidurio taško iki šoninės kraštinės.

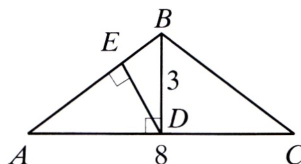
Trikampis, kurio dvi kraštinės yra lygios, vadinamas lygiašoniu.

Lygiosios kraštinės vadinamos šoninėmis kraštinėmis, o trečioji kraštinė — pagrindu.

Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukampinė, ir pusiaukraštinė.



Duota: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $AC = 8$,
$BD \perp AC$, $BD = 3$, $DE \perp AB$.
Rasti: DE.



Sprendimas. 1) BD yra ir pusiaukraštinė,

$$AD = DC = \frac{8}{2} = 4.$$

$\triangle BDA$ yra status ($\angle D = 90°$). Apskaičiuokime AB. Pagal Pitagoro teoremą:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2,$$
$$AB^2 = 3^2 + 4^2,$$
$$AB = \sqrt{25} = 5.$$

2) $\triangle ABD = \triangle CBD$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).
Vadinasi, lygūs ir tų trikampių plotai.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12,$$
$$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot S_{\triangle ABD},$$
$$S_{\triangle ABD} = \frac{5 \cdot ED}{2}.$$
$$12 = 2 \cdot \frac{5 \cdot ED}{2},$$
$$ED = \frac{12}{5}.$$

Atsakymas. 2,4.

Funkcijos f (x) = sin x ir f (x) = cos x

K13 (15.6–15.7)

1. Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį.

a) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$;

b) $f(x) = \arcsin(2x)$;

c) $f(x) = \arccos\left(x^2 - 3\right)$.

2. Raskite funkcijos reikšmių sritį.

a) $f(x) = 9\cos(2x)$;

b) $f(x) = 1 + \sin^2 x$;

c) $f(x) = -\pi - \arccos x$.

3. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 1$, kai:

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{3}{7}\pi\right)$;

b) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $f(x) = 4 - 2\sin(2x)$.

4. Išspręskite lygtį.

a) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

b) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\sin(2x - 20^\circ) = \frac{1}{2}$;

d) $2\arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\pi$.

5. Raskite nelygybės sprendinius.

a) $(2x - 1) \cdot \cos 2 < 0$;

b) $\cos x \geqslant 0$;

c) $\sin(3x) > \frac{1}{2}$.

6. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

b) $\cos\left(\pi - \arcsin(-1)\right)$;

c) $2\arccos 1 - 3\arccos 0 + \frac{1}{2}\arccos \frac{1}{2} + 4\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 3a$ neturi sprendinių?

b) $\sin(3x) = 10 + a^2$ turi sprendinių?

8. Apskaičiuokite plotį žiedo, kurio plotas lygus 400π, o vidinis skersmuo lygus 30.

1. Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį.
a) $f(x) = \sin(x + 3)$;
b) $f(x) = \arccos\left(x + \frac{1}{3}\right)$;
c) $f(x) = \arcsin\left(4 - x^2\right)$.

2. Raskite funkcijos reikšmių sritį.
a) $f(x) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$;
b) $f(x) = \cos^2 x - 2$;
c) $f(x) = -\pi - \arcsin x$.

3. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = -1$, kai:
a) $f(x) = 2\cos(2x) - 9$;
b) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$;
c) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)$.

4. Išspręskite lygtį.
a) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
b) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;
c) $\cos(2x + 20^\circ) = -\frac{1}{2}$;
d) $3\arccos(x + 1) = \pi$.

5. Raskite nelygybės sprendinius.
a) $(3x + 1) \cdot \cos 5 \geqslant 0$;
b) $\sin x < 0$;
c) $\cos\frac{x}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $\sin\left(\arcsin(-\frac{1}{2})\right)$;
b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos(-1)\right)$;
c) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - 2\arcsin 1$.

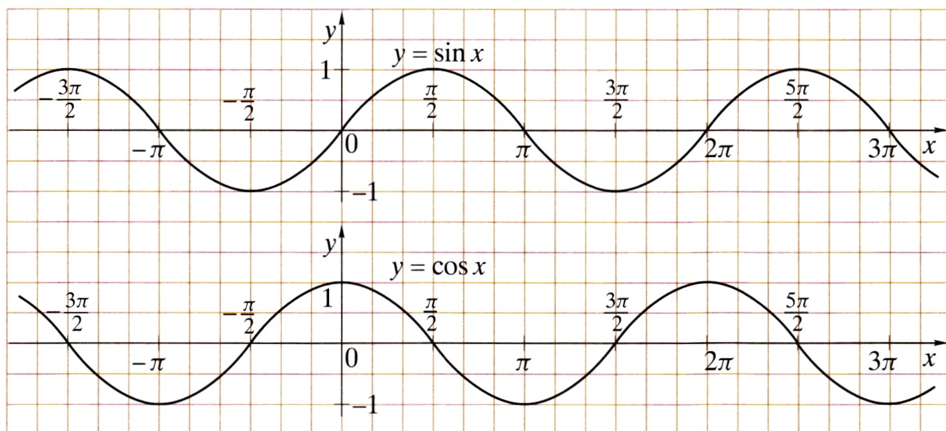
7. Su kuriomis b reikšmėmis lygtis:
a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 4b$ turi sprendinių?
b) $\cos x = 8 + 2b^2$ neturi sprendinių?

8. Apskaičiuokite plotą žiedo, kurio plotis yra 7, o išorinis skersmuo lygus 53.

Funkcijos f(x) = sin x ir f(x) = cos x

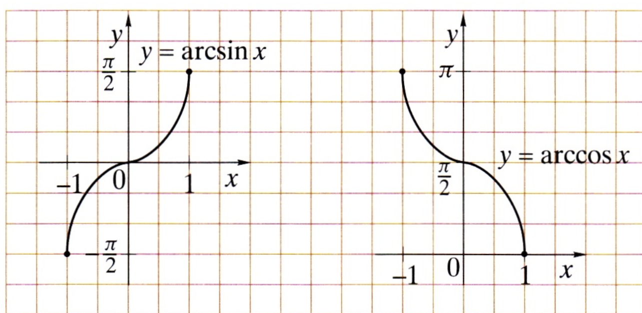
1. Funkcijos $y = f(x)$ *apibrėžimo sritį* sudaro tos x reikšmės, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę. *Reikšmių sritį* sudaro tos y reikšmės, kurias gali įgyti reiškinys $f(x)$.

Funkcijos $y = \sin x$ ir $y = \cos x$ apibrėžtos su visais x, t. y. $x \in (-\infty; +\infty)$, o $y \in [-1; 1]$.



Funkcija $y = \arcsin x$ apibrėžta intervale $x \in [-1; 1]$ ir įgyja reikšmes iš intervalo $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Funkcija $y = \arccos x$ apibrėžta intervale $x \in [-1; 1]$ ir įgyja reikšmes iš intervalo $y \in [0; \pi]$.



1a. $f(x) = \cos\frac{1}{x}$.

Reiškinys $\cos\frac{1}{x}$ turi prasmę su tomis x reikšmėmis, su kuriomis turi prasmę reiškinys $\frac{1}{x}$. Reiškinys $\frac{1}{x}$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x = 0$ (dalyba iš 0 negalima).

Atsakymas. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

1b. $f(x) = \arcsin(2x)$.

Reiškinys $\arcsin(2x)$ turi prasmę su tomis x reikšmėmis, su kuriomis

$$-1 \leqslant 2x \leqslant 1.$$

Randame x reikšmes, tenkinančias dvigubąją nelygybę:

$$-1 \leqslant 2x \leqslant 1 \mid : 2,$$
$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Atsakymas. $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

1c. $f(x) = \arccos(x^2 - 3)$.

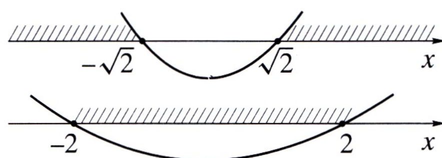
Reiškinys $\arccos(x^2 - 3)$ turi prasmę su tomis x reikšmėmis, su kuriomis

$$-1 \leqslant x^2 - 3 \leqslant 1.$$

Randame x reikšmes, tenkinančias abi nelygybes:

$$\begin{cases} -1 \leqslant x^2 - 3, \\ x^2 - 3 \leqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3 + 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 3 - 1 \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 4 \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - (\sqrt{2})^2 \geqslant 0, \\ x^2 - 2^2 \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geqslant 0, \\ (x - 2)(x + 2) \leqslant 0; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty), \\ x \in [-2; 2]; \end{cases} \quad x \in [-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$$

Atsakymas. $x \in [-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$.

2.

> Funkcijų $y = \sin x$ ir $y = \cos x$ reikšmių sritis yra E: $y \in [-1; 1]$.
> Funkcijos $y = \arcsin x$ reikšmių sritis E: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
> Funkcijos $y = \arccos x$ reikšmių sritis E: $y \in [0; \pi]$.

2a. $f(x) = 9\cos(2x)$.

Reiškinys $\cos(2x)$ įgyja reikšmes, priklausančias intervalui $[-1; 1]$:

$$-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1.$$

Nustatykime reiškinio $9 \cdot \cos(2x)$ įgyjamas reikšmes:

$$-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1 \;\big|\cdot 9,$$
$$-9 \leqslant 9 \cdot \cos(2x) \leqslant 9.$$

Atsakymas. $f(x) \in [-9; 9]$.

2b. $f(x) = 1 + \sin^2 x$.

Reiškinio $\sin x$ reikšmių sritis yra intervalas $[-1; 1]$. Nustatykime reikšmių sritį reiškinio

$$\sin^2 x = (\sin x)^2.$$

Pastebėkime, kad intervalo $[-1; 1]$ skaičių kvadratai yra intervalo $[0; 1]$ skaičiai, pvz.: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \in [0; 1]$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
Vadinasi,

$$0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1 \;\big| + 1,$$
$$1 + 0 \leqslant 1 + \sin^2 x \leqslant 1 + 1,$$
$$1 \leqslant 1 + \sin^2 x \leqslant 2.$$

Atsakymas. $f(x) \in [1; 2]$.

2c. $f(x) = -\pi - \arccos x$.

Reiškinys $\arccos x$ įgyja reikšmes, priklausančias intervalui $[0; \pi]$:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Reiškinio $-\arccos x$ reikšmės priešingos intervalo $[0; \pi]$ skaičiams:

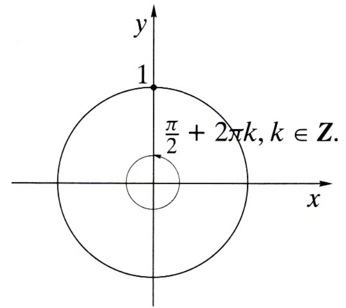
$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \;\big| \cdot (-1),$$
$$0 \geqslant -\arccos x \geqslant -\pi,$$
$$-\pi \leqslant -\arccos x \leqslant 0.$$

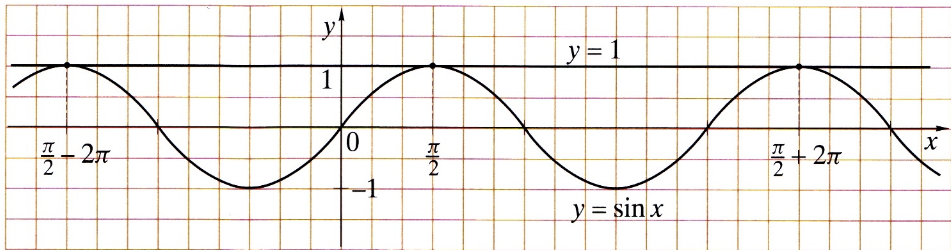
Randame reiškinio $-\pi - \arccos x$ reikšmių sritį:

$$-\pi \leqslant -\arccos x \leqslant 0 \;\big| -\pi,$$
$$-\pi - \pi \leqslant -\pi - \arccos x \leqslant 0 - \pi,$$
$$-2\pi \leqslant -\pi - \arccos x \leqslant -\pi.$$

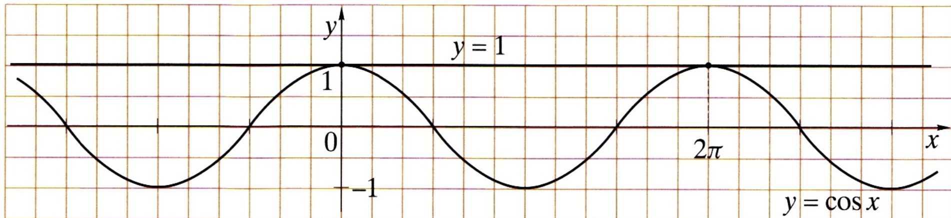
Atsakymas. $f(x) \in [-2\pi; -\pi]$.

3. Lygties $\sin x = 1$ sprendiniai:
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.





Lygties $\cos x = 1$ sprendiniai: $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.



3a. $f(x) = \sin\left(x - \frac{3}{7}\pi\right),\ f(x) = 1$.

Ieškome x reikšmių su kuriomis teisinga lygybė:

$$\sin\left(x - \frac{3}{7}\pi\right) = 1.$$

Lygybė teisinga, kai:

$$x - \frac{3}{7}\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{7}\pi + 2\pi \cdot n,$$

$$x = \frac{13}{14}\pi + 2\pi \cdot n.$$

Atsakymas. $x = \frac{13}{14}\pi + 2\pi \cdot n\ (n \in \boldsymbol{Z})$.

3b. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$, $f(x) = 1$.

Ieškome x reikšmių, su kuriomis teisinga lygybė:

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Lygybė teisinga, kai:

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = 2\pi \cdot k, \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k, \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi \cdot k; \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Atsakymas. $x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi \cdot k$ $(k \in \boldsymbol{Z})$.

3c. $f(x) = 4 - 2\sin(2x)$, $f(x) = 1$.

Sprendžiame lygtį: $4 - 2\sin(2x) = 1$, $2\sin(2x) = 3$, $\sin(2x) = 1{,}5$.
Reiškinys $\sin(2x)$ su visomis x reikšmėmis įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$.
Kadangi $1{,}5 \notin [-1; 1]$, tai lygtis $\sin(2x) = 1{,}5$ sprendinių neturi.

Atsakymas. $\varnothing$.

4.

$\sin x = a, \quad x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi \cdot m,\ m \in \boldsymbol{Z};$
$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi \cdot m,\ m \in \boldsymbol{Z};$
$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a.$

4a. $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

$$2\sin x = -\sqrt{2}, \quad \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2},$$

$$x = (-1)^m \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi \cdot m, \quad m \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = (-1)^m \cdot (-1) \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi \cdot m,$$

$$x = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot m.$$

Atsakymas. $x = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot m$ $(m \in \boldsymbol{Z})$.

4b. $\cos\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{x}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi \cdot m, \quad m \in \boldsymbol{Z},$$

$$\frac{x}{3} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi \cdot m,$$

$$\frac{x}{3} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi \cdot m,$$
$$\frac{x}{3} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot m \mid \cdot 3,$$
$$x = \pm\frac{5\pi}{2} + 6\pi \cdot m.$$

Atsakymas. $x = \pm\frac{5\pi}{2} + 6\pi \cdot m$ $(m \in \boldsymbol{Z})$.

4c. $\sin(2x - 20^\circ) = \frac{1}{2}$.

$$2x - 20^\circ = (-1)^m \cdot \arcsin\frac{1}{2} + \pi \cdot m, \quad m \in \boldsymbol{Z},$$
$$2x - 20^\circ = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot m.$$

Skaičiuokime radianais. 20° pakeitę radianais, turėsime $20^\circ = \frac{\pi}{9}$. Tada:

$$2x - \frac{\pi}{9} = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot m,$$
$$2x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{9} + \pi \cdot m,$$
$$x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2} \cdot m.$$

Atsakymas. $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2} \cdot m$ $(m \in \boldsymbol{Z})$.

4d. $2\arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\pi$.

Funkcija $y = \arcsin x$ yra atvirkštinė funkcijai $y = \sin x$ intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$2\arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\pi \mid : 2, \quad \arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Kadangi arksinusas reikšmę $-\frac{\pi}{2}$ įgyja taške -1, tai

$$x - \frac{1}{2} = -1, \quad x = -1 + \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Pasitikriname: kai $x = -\frac{1}{2}$, tai

$$2\arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2\arcsin\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\arcsin(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

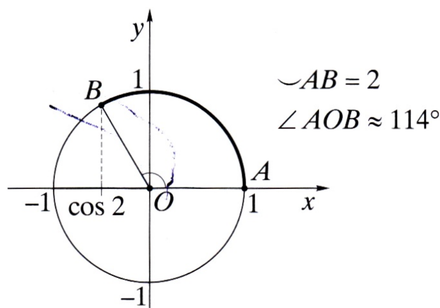
Atsakymas. $x = -\frac{1}{2}$.

5a. $(2x - 1) \cdot \cos 2 < 0$.

Reiškinys $\cos 2$ yra neigiamas, nes:

$$\cos 2 \approx \cos(2 \cdot 57^\circ) = \cos 114^\circ < 0,$$

114° — II ketvirčio kampas.



Padalykime abi duotosios nelygybės puses iš $\cos 2$:

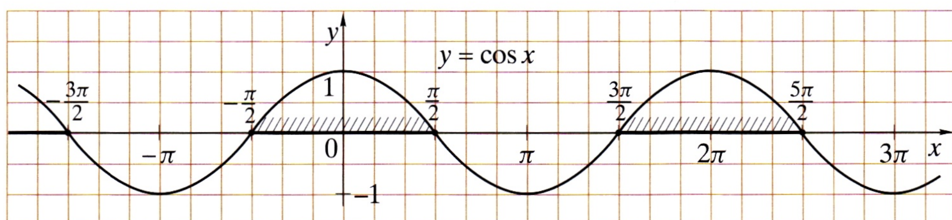
$$(2x - 1) \cdot \cos 2 < 0 \;\Big|\; : \cos 2 < 0, \quad 2x - 1 > 0.$$

Išsprendžiame šią nelygybę: $2x - 1 > 0$, $2x > 1$, $x > \frac{1}{2}$.

Atsakymas. $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

5b. $\cos x \geqslant 0$.

I būdas. Remiamės funkcijos $y = \cos x$ grafiku.

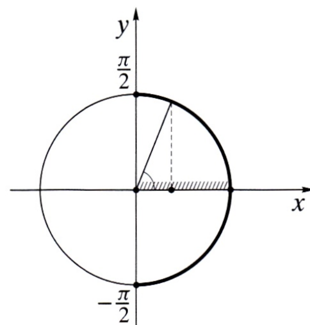


Randame tas x reikšmes, su kuriomis $y = \cos x$ grafikas yra ne žemiau tiesės $y = 0$ (Ox ašies).

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n\right], \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

II būdas. Remiamės kosinuso apibrėžimu. Matome, kad vienetinio apskritimo taško abscisė neneigiama, kai

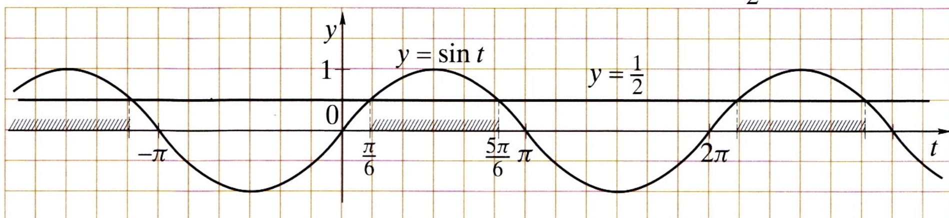
$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n\right], \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$



Atsakymas. $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n\right]$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

5c. $\sin(3x) > \frac{1}{2}$.

I būdas. Pažymėkime $3x = t$. Sprendžiame nelygybę $\sin t > \frac{1}{2}$.



Randame grafikų $y = \frac{1}{2}$ ir $y = \sin t$ bendrų taškų abscises intervale $[0; 2\pi]$:

$$\sin t = \frac{1}{2}, \quad t = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Kai $n = 0$, tai $t_1 = \frac{\pi}{6}$; kai $n = 1$, tai $t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$; $t \in [0; 2\pi]$.
Iš brėžinio matome, kad nelygybės $\sin t > \frac{1}{2}$, $t \in [0; 2\pi]$, sprendiniai yra intervalo $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ skaičiai.
Visus nelygybės $\sin t > \frac{1}{2}$ sprendinius randame remdamiesi tuo, kad funkcija $y = \sin t$ yra periodinė ir jos periodas yra 2π. Taigi

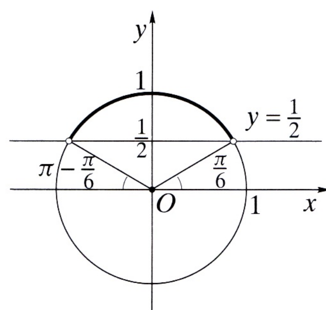
$$\sin t > \frac{1}{2}, \quad \text{kai} \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Grįžtame prie x:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot k \;\Big|\; : 3,$$
$$\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot k < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot k.$$

II būdas. Remiamės sinuso apibrėžimu. $\sin(3x) > \frac{1}{2}$ su tomis $3x$ reikšmėmis, su kuriomis vienetinio apskritimo taškai yra virš tiesės tiesės $y = \frac{1}{2}$ (tų apskritimo taškų y koordinatės yra didesnės už $\frac{1}{2}$).

Randame $3x$ reikšmes, su kuriomis $\sin(3x) = \frac{1}{2}$:
$3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ arba $3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Ieškomas x reikšmes rasime išsprendę dvigubąją nelygybę $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$:
$\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$



Atsakymas. $x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot k; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\right)$ $(k \in \boldsymbol{Z})$.

6.

$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos a \in [0; \pi]$,
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

6a. $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Randame

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Turime

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6b. $\cos\big(\pi - \arcsin(-1)\big)$.

Randame

$$\arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Turime

$$\cos\left(\pi - (-\frac{\pi}{2})\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Atsakymas. 0.

6c.

$$2\arccos 1 - 3\arccos 0 + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2} + 4\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 2\cdot 0 - 3\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}.$$

Atsakymas. $-\frac{\pi}{2}$.

7a.

$\cos x \in [-1; 1]$, $\sin x \in [-1; 1]$.

Lygtis $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 3a$ neturės sprendinių, kai

$$\begin{aligned} 1 - 3a &< -1, \\ -3a &< -1 - 1, \\ -3a &< -2 \;\big|\; : (-3), \\ a &> \frac{2}{3}; \end{aligned} \qquad \text{arba} \qquad \begin{aligned} 1 - 3a &> 1, \\ -3a &> 1 - 1, \\ -3a &> 0 \;\big|\; : (-3), \\ a &< 0. \end{aligned}$$

Atsakymas. $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

7b. Lygtis $\sin(3x) = 10 + a^2$ turės sprendinių, kai

$$-1 \leqslant 10 + a^2 \leqslant 1.$$

Sprendžiame nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 10 + a^2 \geqslant -1, \\ 10 + a^2 \leqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 11 \geqslant 0, \\ a^2 + 9 \leqslant 0. \end{cases}$$

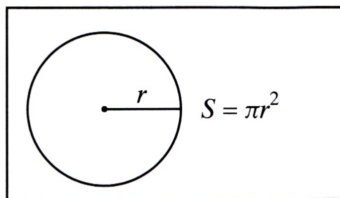
Kadangi $a^2 \geqslant 0$ su visais $a \in \boldsymbol{R}$, tai ir $a^2 + 11 > 0$, ir $a^2 + 9 > 0$ su visais $a \in \boldsymbol{R}$. Vadinasi, visi $a \in \boldsymbol{R}$ yra nelygybės $a^2 + 11 \geqslant 0$ sprendiniai, o nelygybė $a^2 + 9 \leqslant 0$ sprendinių neturi. Taigi nelygybių sistema

$$\begin{cases} a^2 + 11 \geqslant 0, \\ a^2 + 9 \leqslant 0 \end{cases}$$

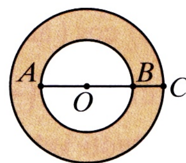
sprendinių neturi.

Atsakymas. Tokių a reikšmių nėra.

8.



Duota: $S_{\text{žiedo}} = 400\pi$, $AB = 30$.
Rasti: BC.
Sprendimas.



$$S_{\text{žiedo}} = \pi \cdot OC^2 - \pi \cdot OB^2,$$
$$S_{\text{žiedo}} = 400\pi \text{ (duota)},$$
$$OB = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$
$$\pi \cdot OC^2 - \pi \cdot 15^2 = 400\pi \ \Big| : \pi,$$
$$OC^2 - 225 = 400,$$
$$OC^2 = 625,$$
$$OC = 25.$$

Randame BC:

$$BC = OC - OB = 25 - 15 = 10.$$

Atsakymas. 10.

Funkcijos f (x) = tg x ir f (x) = ctg x

K14 (15.8–15.9)

1. Nubraižykite funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafiką intervale $(-\pi; \pi)$ ir raskite:
a) funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ apibrėžimo sritį šiame intervale;
b) funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ reikšmių sritį šiame intervale;
c) nelygybės $\operatorname{tg}(2x) > 0$ sprendinius, priklausančius intervalui $(-\pi; \pi)$;
d) nelygybės $\operatorname{tg}(2x) \leqslant \sqrt{3}$ sprendinius, priklausančius intervalui $(-\pi; \pi)$.

2. Išspręskite lygtį.
a) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -1$;
b) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{3}$;
c) $\sin x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 2$;
d) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;
e) $3\sin x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$;
f) $6\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 1$.

3. Nustatykite, ar reiškinio reikšmė yra didesnė už 0, ar yra mažesnė už 0.
a) $\sin 190^\circ \cdot \cos(-190^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$;
b) $\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right)$;
c) $\sin(-1) \cdot \cos 3 \cdot \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg}(-4)$.

4. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $\operatorname{arcctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1$;
b) $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + 2\operatorname{arcctg}(-1)$.

5. Duoti vektoriai $\vec{m}(1; 2)$, $\vec{n}(-3; 5)$ ir $\vec{p}(4; 0)$. Raskite:
a) vektoriaus $-2\vec{m} - \vec{n} - 3\vec{p}$ koordinates;
b) vektoriaus $\vec{n}$ ilgį;
c) kampo tarp vektorių $\vec{n}$ ir $\vec{p}$ kosinusą.

K14 (15.8–15.9)

1. Nubraižykite funkcijos $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ grafiką intervale $(-2\pi; 2\pi)$ ir raskite:
a) funkcijos $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ apibrėžimo sritį šiame intervale;
b) funkcijos $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ reikšmių sritį šiame intervale;
c) nelygybės $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} > 0$ sprendinius, priklausančius intervalui $(-2\pi; 2\pi)$;
d) nelygybės $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \leqslant 1$ sprendinius, priklausančius intervalui $(-2\pi; 2\pi)$.

2. Išspręskite lygtį.
a) $\operatorname{ctg}(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
b) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
c) $\cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 2$;
d) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;
e) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5\cos x = 0$;
f) $3\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x = 2$.

3. Nustatykite, ar reiškinio reikšmė yra didesnė už 0, ar yra mažesnė už 0.
a) $\cos 120^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$;
b) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) \cdot \cos\left(-\frac{12}{13}\pi\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
c) $\sin(-5) \cdot \cos(-4) \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 2$.

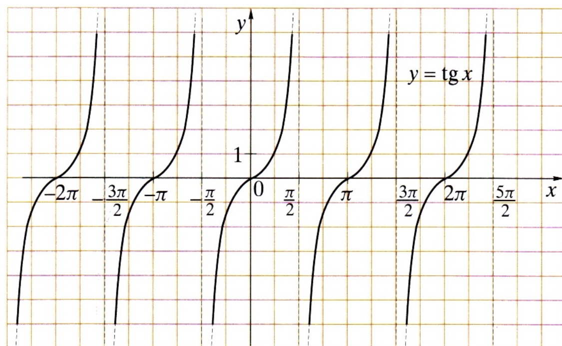
4. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$;
b) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}(\arcsin 0)$;
c) $\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(-1)$.

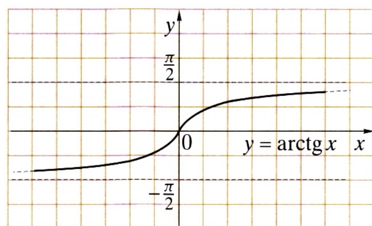
5. 1) Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates ir ilgį, jei $A(-3; 1{,}5)$ ir $B(0; -3{,}5)$.
2) Raskite atkarpos AB vidurio taško C koordinates.

Funkcijos f (x) = tg x ir f (x) = ctg x

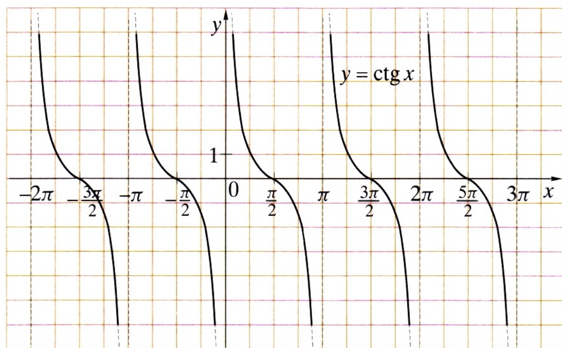
K14 (15.8–15.9)

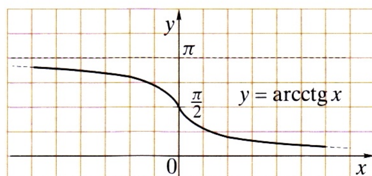
1. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ apibrėžta su visais x, išskyrus $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė.
Funkcija yra nelyginė ir periodinė; mažiausias teigiamas periodas lygus π.





Lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendiniai: $x = \operatorname{arctg} a + \pi \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja reikšmes iš intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.
Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ apibrėžta su visais x, išskyrus $x = \pi \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė.
Funkcija yra nelyginė ir periodinė; mažiausias teigiamas periodas yra π.





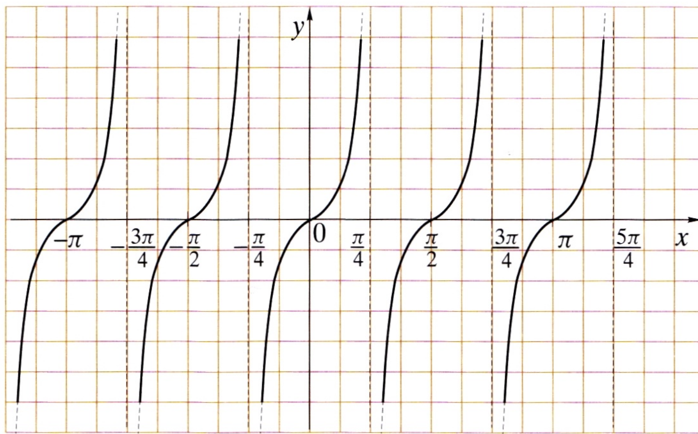
Lygties $\operatorname{ctg} x = a$ sprendiniai: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
Funkcija $y = \operatorname{arcctg} x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja reikšmes iš intervalo $(0; \pi)$; $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Nubraižykime funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafiką intervale $(-\pi; \pi)$. Braižydami $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafiką remsimės funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ savybėmis ir grafiku.

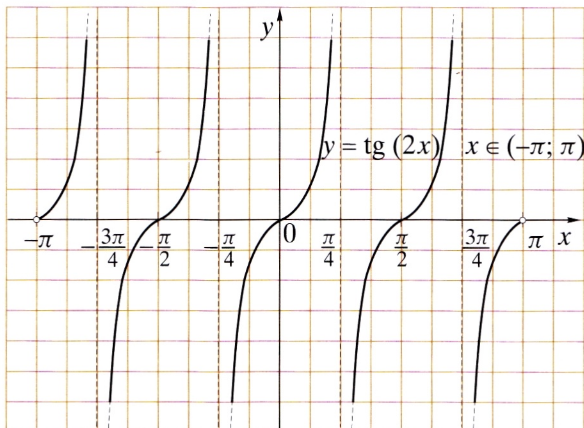
Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ neapibrėžta, kai $x = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \ldots$
Funkcija $y = \operatorname{tg}(2x)$ neapibrėžta, kai $2x = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}; \pm\frac{5\pi}{2}; \ldots$, t. y., kai

$$x = \pm\frac{\pi}{4}; \quad \pm\frac{3\pi}{4}; \quad \pm\frac{5\pi}{4}; \ldots.$$

Intervalui $(-\pi; \pi)$ priklauso reikšmės $x = -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$.
Funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ mažiausias teigiamas periodas yra $\frac{\pi}{2}$ — jis dvigubai mažesnis už funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ mažiausią teigiamą periodą.
Funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafikas panašus į funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ grafiką.



Galime įsivaizduoti, kad funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafiką gauname „suspaudę“ funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ grafiką (koeficientas 2).
Paliekame $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafiko dalį, priklausančią intervalui $(-\pi; \pi)$.



1a. Funkcija $y = \operatorname{tg}(2x)$, $x \in (-\pi; \pi)$, neapibrėžta, kai $x = -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$.

Atsakymas. D: $\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$.

1b. Funkcijos $y = \operatorname{tg}(2x)$, $x \in (-\pi; \pi)$ reikšmių sritis — visi realieji skaičiai.

Atsakymas. E: $(-\infty; +\infty)$.

1c. $\operatorname{tg}(2x) > 0$, kai $x \in (-\pi; \pi)$.

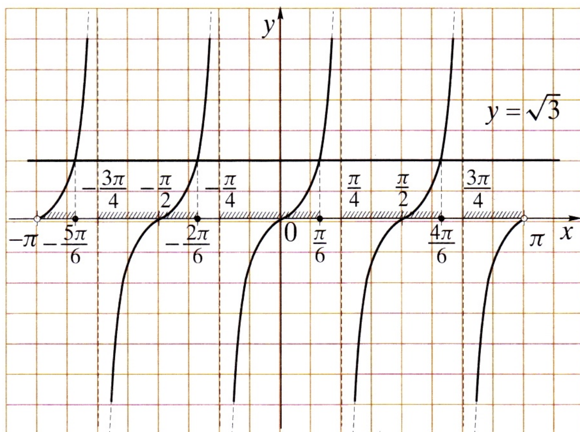
Nelygybės sprendinius rasime pasinaudoję $y = \operatorname{tg}(2x)$, $x \in (-\pi; \pi)$, grafiku. Reikia rasti tas x reikšmes, su kuriomis $\operatorname{tg}(2x)$ yra virš tiesės Ox ($\operatorname{tg}(2x) > 0$). Ieškomos x reikšmės yra:

$x \in \left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Atsakymas. $x \in \left(-\pi + \frac{\pi}{2} \cdot n; -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$, $n = 0; 1; 2; 3$.

1d. $\operatorname{tg}(2x) \leqslant \sqrt{3}$, $x \in (-\pi; \pi)$.

Raskime grafiko $y = \operatorname{tg}(2x)$ ir tiesės $y = \sqrt{3}$ susikirtimo taškų x koordinates.



Spręskime lygtį $\operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3}$:

$$2x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi \cdot n, \quad 2x = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot n; \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Intervalui $(-\pi; \pi)$ priklauso:

$x = \frac{\pi}{6}$, kai $n = 0$;

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, kai $n = 1$;

$x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, kai $n = -1$;

$x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$, kai $n = -2$.

Atsakyme nurodome tas x reikšmes, su kuriomis $y = \operatorname{tg}(2x)$ grafikas yra ne aukščiau tiesės $y = \sqrt{3}$ ($\operatorname{tg}(2x) \leqslant 3$).

Atsakymas. $x \in \left(-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$.

2.

Lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendiniai: $x = \operatorname{arctg} a + \pi \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Lygties $\operatorname{ctg} x = a$ sprendiniai: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$; $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

2a. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$.

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$\frac{x}{2} = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi \cdot n,$$
$$\frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi \cdot n,$$
$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n,$$
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n.$$

Atsakymas. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

2b. $3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\frac{\pi}{4} - 3x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$\frac{\pi}{4} - 3x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n,$$
$$-3x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi \cdot n,$$
$$-3x = -\frac{\pi}{12} + \pi \cdot n,$$
$$x = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} \cdot n.$$

Pastaba. Paskutinę lygybę galėjome parašyti ir taip:

$$x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3} \cdot n.$$

Atsakymas. $x = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} \cdot n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

2c. $\sin x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 2.$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$

$$\sin x + 1 = 2,$$
$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Kadangi su rastosiomis reikšmėmis funkcija $y = \operatorname{tg} x$ yra neapibrėžta, tai duotoji lygtis sprendinių neturi.

Atsakymas. $\varnothing$.

2d. $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$

Tokio tipo lygtys vadinamos antrojo laipsnio homogeninėmis, nes visų jos narių $\sin^2 x$, $\sin x \cdot \cos x$, $\cos^2 x$ laipsnis vienodas (lygus 2). Tokio tipo lygtis galima spręsti dalijant iš $\sin^2 x$ arba $\cos^2 x$, tik prieš tai būtina pasitikrinti, ar dalyti galima.

$$2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0 \;\Big|\; : \cos^2 x.$$

Dalyti galima, nes $\cos x \neq 0$ (jeigu būtų $\cos x = 0$, tai iš lygties gautume $2\sin^2 x = 0$, t. y. $\sin x = 0$; bet taip nebūna, nes $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$
$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0,$$
$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Pažymėję $\operatorname{tg} x = t$, gauname kvadratinę lygtį:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0, \quad t_1 = \frac{3-5}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+5}{2 \cdot 2} = 2.$$

Grįžtame prie x:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi \cdot n;$$
$$\operatorname{tg} x = 2, \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Atsakymas. $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi \cdot n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot k$ $(n, k \in \boldsymbol{Z})$.

2e. $3\sin x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha.$

$3\sin x + 4\cos x = 0.$
Tai pirmojo laipsnio homogeninė lygtis. Abi jos puses padalykime iš $\cos x$ ($\cos x \neq 0$, nes kitaip ir $\sin x = 0$, — prieštara):

$$\frac{3\sin x}{\cos x} + \frac{4\cos x}{\cos x} = 0,$$
$$3\operatorname{tg} x + 4 = 0,$$
$$3\operatorname{tg} x = -4,$$
$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3},$$
$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi \cdot n.$$

Atsakymas. $x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \pi \cdot n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

2f. $6\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 1.$

Ši lygtis nėra homogeninė, nes dešinėje lygybės pusėje narys 1 nėra kvadratinis. Jį pakeitę reiškiniu $\cos^2 x + \sin^2 x$ $(= 1)$, gausime homogeninę antrojo laipsnio lygtį:

$$6\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x,$$
$$5\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Dalijame iš $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$, nes priešingu atveju iš lygties gautume ir $\sin x = 0$):

$$5\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \;\big|\; : \cos^2 x,$$
$$\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$
$$5\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Pažymėkime

$$\operatorname{tg} x = t.$$

Tada

$$5t^2 - 2t - 2 = 0, \quad D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 44,$$

$$t_1 = \frac{2 - \sqrt{44}}{2 \cdot 5} = \frac{2 - 2\sqrt{11}}{2 \cdot 5} = \frac{2(1 - \sqrt{11})}{2 \cdot 5} = \frac{1 - \sqrt{11}}{5},$$

$$t_2 = \frac{2 + \sqrt{44}}{2 \cdot 5} = \frac{2 + 2\sqrt{11}}{2 \cdot 5} = \frac{2(1 + \sqrt{11})}{2 \cdot 5} = \frac{1 + \sqrt{11}}{5}.$$

Grįžtame prie x:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \sqrt{11}}{5}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{11}}{5} + \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 + \sqrt{11}}{5}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{11}}{5} + \pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Atsakymas. $x = \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{11}}{5} + \pi \cdot n$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{11}}{5} + \pi \cdot k$ $(n, k \in \boldsymbol{Z})$.

3.

$(+) \cdot (+) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$

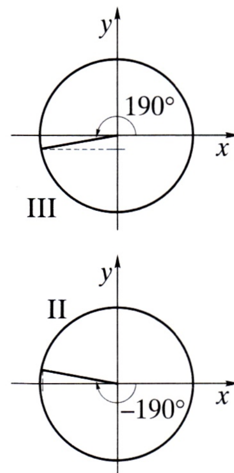
Ketvirtis	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

3a. Nustatykime ženklą sandaugos

$\sin 190^\circ \cdot \cos(-190^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

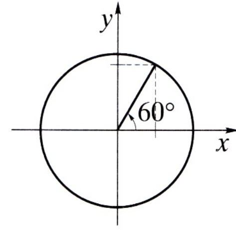
$\sin 190^\circ < 0$,
nes 190° — III ketvirčio kampas.

$\cos(-190^\circ) < 0$,
nes -190° — II ketvirčio kampas.



$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} > 0,$

nes $\sin 60^\circ > 0$, $\cos 60^\circ > 0$.



Kadangi sandaugos $\sin 190^\circ \cdot \cos(-190^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$ du dauginamieji yra neigiami, o vienas teigiamas, tai sandauga yra teigiama:

$$\sin 190^\circ \cdot \cos(-190^\circ) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ > 0.$$

Atsakymas. Didesnė už 0.

3b. Nustatykime ženklą sandaugos:

$$\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right).$$

$$\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi - 3 \cdot \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ > 0,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} > 0,$$

$$\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(2\frac{1}{3}\pi - 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ > 0.$$

Visi dauginamieji teigiami, todėl ir sandauga teigiama:

$$\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) > 0.$$

Atsakymas. Didesnė už 0.

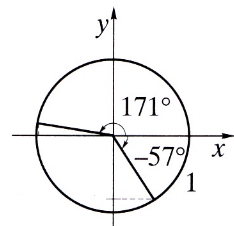
3c. Nustatykime ženklą sandaugos:

$$\sin(-1) \cdot \cos 3 \cdot \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg}(-4).$$

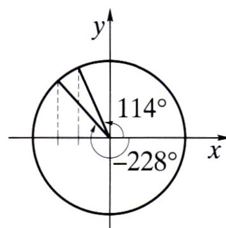
1 radiano dydžio kampas $\approx 57^\circ$.

$\sin(-1) \approx \sin(-57^\circ) < 0,$

$\cos 3 \approx \cos(3 \cdot 57^\circ) = \cos 171^\circ < 0.$



$\operatorname{tg} 2 \approx \operatorname{tg}(2 \cdot 57^\circ) = \operatorname{tg} 114^\circ < 0,$
$\operatorname{ctg}(-4) \approx \operatorname{ctg}(-228^\circ) < 0.$



Kadangi visi 4 dauginamieji neigiami, tai jų sandauga teigiama:

$$\sin(-1) \cdot \cos 3 \cdot \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg}(-4) > 0.$$

Atsakymas. Didesnė už 0.

4.

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos x \in [0; \pi], \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{arcctg} x \in (0; \pi), \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

4a. $\operatorname{arcctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1 = \pi - \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

Atsakymas. $\frac{\pi}{2}$.

4b. $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

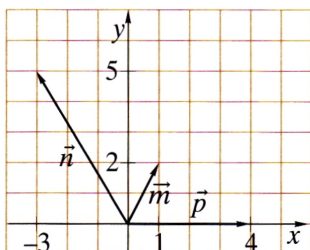
Atsakymas. 1.

4c. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + 2\operatorname{arcctg}(-1) =$

$$= -\arcsin\frac{1}{2} - 2\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2(\pi - \operatorname{arcctg} 1) =$$
$$= -\frac{\pi}{6} - 2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cdot \frac{\pi}{3} + 2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{2} - \pi + \frac{3\pi}{2} = -\frac{7\pi}{6}.$$

Atsakymas. $-\frac{7\pi}{6}$.

5. $\vec{m}(1; 2)$, $\vec{n}(-3; 5)$, $\vec{p}(4; 0)$.



$\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$

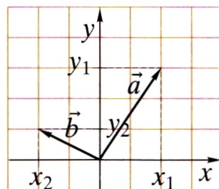
$(n \cdot \vec{a})(nx_1; ny_1)$,

$(\vec{a} + \vec{b})(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$,

$(\vec{a} - \vec{b})(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$,

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.



5a. $-2\vec{m} - \vec{n} - 3\vec{p}$.

Raskime vektoriaus $-2\vec{m}$ koordinates. Vektorių daugindami iš skaičiaus, iš to skaičiaus dauginame vektoriaus koordinates:

$$-2\vec{m}(-2 \cdot 1; -2 \cdot 2), \quad -2\vec{m}(-2; -4).$$

Raskime vektoriaus $3\vec{p}$ koordinates:

$$3\vec{p}(3 \cdot 4; 3 \cdot 0), \quad 3\vec{p}(12; 0).$$

Raskime vektoriaus $-2\vec{m} - \vec{n} - 3\vec{p}$ koordinates. Sudėdami (atimdami) vektorius sudedame (atimame) jų koordinates:

$$\left(-2\vec{m} - \vec{n} - 3\vec{p}\right)(-2 - (-3) - 12; -4 - 5 - 0),$$
$$\left(-2\vec{m} - \vec{n} - 3\vec{p}\right)(-11; -9).$$

Atsakymas. $(-11; -9)$.

5b. Raskime $\vec{n}(-3; 5)$ ilgį.

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

Atsakymas. $\sqrt{34}$.

5c. Raskime kampo tarp vektorių $\vec{n}$ ir $\vec{p}$ kosinusą:

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{p}}) = \frac{-3 \cdot 4 + 5 \cdot 0}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2}} = \frac{-12}{\sqrt{34} \cdot 4} = -\frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Atsakymas. $-\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

Trigonometrinės formulės

K15 (15.10–15.11)

1. Apskaičiuokite.

a) $\sin(\alpha+\beta)$, kai $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

b) $\cos(\alpha+\beta)$, kai $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\beta$, kai $\operatorname{tg}\alpha = 3$ ir $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$.

2. Įrodykite tapatybę.

a) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin(2x)$;

b) $\frac{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

c) $\frac{\sin\alpha+\sin(3\alpha)+\sin(5\alpha)}{\cos\alpha+\cos(3\alpha)+\cos(5\alpha)} = \operatorname{tg}(3\alpha)$.

3. Išreikškite sandauga.

a) $1 + \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)$;

b) $\sin\alpha + \sin(3\alpha) + \sin(7\alpha) + \sin(5\alpha)$;

c) $\cos^2\left(\frac{3\alpha}{2} - \pi\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)$.

4. Išspręskite lygtį.

a) $\cos^4(2x) - \sin^4(2x) = -\frac{1}{2}$;

b) $\cos(2x) - \sin x = 0$;

c) $\cos x = \cos(5x)$;

d) $\sin^2(2x) = 1$;

e) $\sin(60^\circ + x) - \sin(60^\circ - x) = -1$.

5. a) Raskite lygties $\operatorname{tg} x = \sin x$ mažiausią teigiamą sprendinį.

b) Raskite lygties $\frac{2-\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$ mažiausią teigiamą sprendinį.

c) Raskite lygties $(\cos x+3)\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ sprendinius, priklausančius intervalui $[-90^\circ; 90^\circ]$.

6. Ganykloje yra 4 m ilgio tiesi tvora. Ožka pririšta 4 m ilgio virve prie kuolo, esančio tos tvoros viduryje. Apskaičiuokite, kokiame plote gali ganytis ožka. Atsakymą parašykite kvadratinio metro tikslumu.

1. Apskaičiuokite.

a) $\cos(\alpha + \beta)$, kai $\cos\alpha = 0{,}6$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin(\alpha - \beta)$, kai $\cos\alpha = 0{,}6$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{tg}\beta$, jei $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ ir $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2$.

2. Įrodykite tapatybę.

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$;

b) $\frac{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha$;

c) $\frac{\sin\alpha - 2\sin(2\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos\alpha - 2\cos(2\alpha)+\cos(3\alpha)} = \operatorname{tg}(2\alpha)$.

3. Išreikškite sandauga.

a) $1 - \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)$;

b) $\cos\alpha + \cos(3\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(5\alpha)$;

c) $\sin^2\left(\frac{3\alpha}{2} + \pi\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \pi\right)$.

4. Išspręskite lygtį.

a) $4\sin(2x)\cos(2x)\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos(2x) = 2\sin x - 0{,}5$;

c) $\sin(3x) = \sin(7x)$;

d) $\cos^2(4x) = \frac{1}{2}$;

e) $\cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x) = -1$.

5. a) Raskite lygties $\operatorname{ctg} x = \cos x$ didžiausią neigiamą sprendinį.

b) Raskite lygties $\frac{\cos^2 x + 1}{\sin x} = \sin x$ didžiausią neigiamą sprendinį.

c) Raskite lygties $(\cos x - 2)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$ sprendinius, priklausančius intervalui $[-90^\circ; 90^\circ]$.

6. Ganykloje yra 6 m ilgio tiesi tvora. Prie kuolo, esančio toje tvoroje už 2 m nuo vieno jos galo, 4 m ilgio virve pririšta ožka. Apskaičiuokite, kokiame plote gali ganytis ožka. Atsakymą parašykite 1 m^2 tikslumu.

1.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

1a. $\sin(\alpha+\beta)$, kai $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.
Remiamės kampų sumos sinuso formule:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Sąlygoje duota, kad $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, todėl:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{13}+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Raskime $\cos\alpha$ ir $\sin\beta$ reikšmes.
Žinodami $\sin\alpha$, galime rasti $\cos\alpha$ remdamiesi formule $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2+\cos^2\alpha=1,\quad \cos^2\alpha=1-\frac{25}{169},\quad \cos^2\alpha=\frac{144}{169}.$$

Kadangi α yra II ketvirčio kampas $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, tai $\cos\alpha<0$. Vadinasi,

$$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}.$$

Analogiškai remdamiesi formule $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$, randame $\sin\beta$:

$$\sin^2\beta+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1,\quad \sin^2\beta=1-\frac{9}{25},\quad \sin^2\beta=\frac{16}{25}.$$

Kadangi β yra I ketvirčio kampas $\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$, tai $\sin\beta>0$. Vadinasi, $\sin\beta=\frac{4}{5}$. Turime:

$$\frac{3}{13}+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{13}+\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{13}-\frac{12\cdot4}{13\cdot5}=\frac{3\cdot5-12\cdot4}{13\cdot5}=-\frac{33}{65}.$$

Atsakymas. $-\frac{33}{65}$.

1b. $\cos(\alpha+\beta)$, kai $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\cos\alpha - \frac{5}{13}\cdot\sin\beta.$$

Apskaičiuojame $\cos\alpha$ ir $\sin\beta$ (žr. **1a**):

$$\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \quad \sin\beta = \frac{4}{5}.$$

Įstatę gauname:

$$\frac{3}{5}\cdot\cos\alpha - \frac{5}{13}\cdot\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}.$$

Atsakymas. $-\frac{56}{65}$.

1c. $\operatorname{tg}\beta$, kai $\operatorname{tg}\alpha = 3$ ir $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$.

I būdas.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{3+\operatorname{tg}\beta}{1-3\operatorname{tg}\beta},$$

$$\frac{3+\operatorname{tg}\beta}{1-3\operatorname{tg}\beta} = 1, \quad 3+\operatorname{tg}\beta = 1 - 3\operatorname{tg}\beta,$$

$$4\operatorname{tg}\beta = -2, \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{2}.$$

II būdas.

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left[(\alpha+\beta)-\alpha\right] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}.$$

Atsakymas. $-\frac{1}{2}$.

2a. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin(2x)$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Pertvarkome kairiosios pusės reiškinį:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - 2\sin x\cos x =$$
$$= 1 - \sin(2x).$$

Gavome dešiniosios pusės reiškinį. Tapatybė įrodyta.

2b. $\frac{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,$	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$
$1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha,$	$1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha,$
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$	

Pertvarkome kairiosios pusės reiškinį:

$$\frac{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \frac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} =$$
$$= \frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Gavome dešiniosios pusės reiškinį. Tapatybė įrodyta.

2c. $\frac{\sin\alpha+\sin(3\alpha)+\sin(5\alpha)}{\cos\alpha+\cos(3\alpha)+\cos(5\alpha)} = \operatorname{tg}(3\alpha).$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

Skaitiklyje taikykime sinusų sumos formulę imdami $\sin\alpha+\sin(5\alpha)$, o vardiklyje taikykime kosinusų sumos formulę imdami $\cos\alpha + \cos(5\alpha)$. Taip grupuoti patogu, nes gausime kampą 3α, kuris yra nariuose $\sin(3\alpha)$ ir $\cos(3\alpha)$.
Tvarkome kairįjį lygybės reiškinį:

$$\frac{\sin\alpha+\sin(5\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos\alpha+\cos(5\alpha)+\cos(3\alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+\sin(3\alpha)}{2\cos\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}+\cos(3\alpha)} =$$
$$= \frac{2\sin(3\alpha)\cos(-2\alpha)+\sin(3\alpha)}{2\cos(3\alpha)\cos(-2\alpha)+\cos 3\alpha}.$$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$

Skaitiklį ir vardiklį skaidome dauginamaisiais:

$$\frac{\sin(3\alpha)\cdot\big(2\cos(2\alpha)+1\big)}{\cos(3\alpha)\cdot\big(2\cos(2\alpha)+1\big)} = \frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)} = \operatorname{tg}(3\alpha).$$

Gavome dešiniosios pusės reiškinį. Tapatybė įrodyta.

3a. $1 + \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)$.

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\\ &\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,\\ &\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\\ &1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha.\end{aligned}$$

I būdas.

$$\begin{aligned}1 + \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\cos\alpha \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha).\end{aligned}$$

II būdas.

$$\begin{aligned}1 + \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) &= 2\cos^2\alpha + \sin(2\alpha) = 2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\cos\alpha \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha).\end{aligned}$$

Atsakymas. $2\cos\alpha \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)$.

3b. $\sin\alpha + \sin(3\alpha) + \sin(7\alpha) + \sin(5\alpha)$.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Sugrupavę narius taip, kad gautume vienodų kampų, taikome sinusų sumos formulę:

$$\begin{aligned}&\big(\sin\alpha + \sin(7\alpha)\big) + \big(\sin(3\alpha) + \sin(5\alpha)\big) = \\ &= 2\sin\frac{\alpha + 7\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - 7\alpha}{2} + 2\sin\frac{3\alpha + 5\alpha}{2} \cdot \cos\frac{3\alpha - 5\alpha}{2} = \\ &= 2\sin(4\alpha) \cdot \cos(3\alpha) + 2\sin(4\alpha) \cdot \cos\alpha = \\ &= 2\sin(4\alpha) \cdot \big(\cos(3\alpha) + \cos\alpha\big).\end{aligned}$$

Reiškinį $\cos(3\alpha) + \cos\alpha$ pertvarkome į sandaugą:

$$\cos(3\alpha) + \cos\alpha = 2\cos\frac{3\alpha + \alpha}{2} \cdot \cos\frac{3\alpha - \alpha}{2} = 2\cos(2\alpha) \cdot \cos\alpha.$$

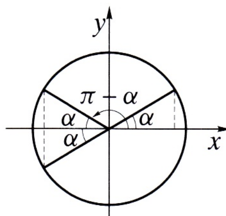
Tada

$$\begin{aligned}2\sin(4\alpha) \cdot \big(\cos(3\alpha) + \cos\alpha\big) &= 2\sin(4\alpha) \cdot 2\cos(2\alpha) \cdot \cos\alpha = \\ &= 4\sin(4\alpha) \cdot \cos(2\alpha) \cdot \cos\alpha.\end{aligned}$$

Atsakymas. $4\sin(4\alpha)\cos(2\alpha)\cos\alpha$.

3c. $\cos^2\left(\frac{3\alpha}{2}-\pi\right)-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)$.

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$,
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$,
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.



$$\cos\left(\frac{3\alpha}{2}-\pi\right)=\cos\left(-\left(\pi-\frac{3\alpha}{2}\right)\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{3\alpha}{2},$$

$$\cos^2\left(\frac{3\alpha}{2}-\pi\right)=\left(\cos\left(\frac{3\alpha}{2}-\pi\right)\right)^2=\left(-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)^2=\cos^2\frac{3\alpha}{2}.$$

Analogiškai $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}$.
Vadinasi,

$$\cos^2\left(\frac{3\alpha}{2}-\pi\right)-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)=\cos^2\frac{3\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Remdamiesi kvadratų skirtumo formule, skaidome dauginamaisiais:

$$\cos^2\frac{3\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Skliaustelių reiškinius pertvarkome į sandaugas.

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-2\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}=-2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}=2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Turime:

$$\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=-2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=-4\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Gautąjį reiškinį dar galime pertvarkyti.

$$\boxed{2\sin\alpha\cos\alpha=\sin(2\alpha).}$$

$$-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=-\sin(2\alpha)\cdot\sin\alpha.$$

Atsakymas. $-\sin(2\alpha)\cdot\sin\alpha.$

4a. $\cos^4(2x)-\sin^4(2x)=-\frac{1}{2}.$

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b).}$$

Kairiąją pusę galime išskaidyti dauginamaisiais:

$$\cos^4(2x)=\left(\cos^2(2x)\right)^2,$$
$$\sin^4(2x)=\left(\sin^2(2x)\right)^2.$$

Turėsime:

$$\left(\cos^2(2x)\right)^2-\left(\sin^2(2x)\right)^2=\left(\cos^2(2x)-\sin^2(2x)\right)\left(\cos^2(2x)+\sin^2(2x)\right).$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos(2\alpha).\end{array}}$$

Pastebėkime, kad

$$\cos^2(2x)+\sin^2(2x)=1,$$
$$\cos^2(2x)-\sin^2(2x)=\cos(4x).$$

Turime lygtį $\cos(4x)=-\frac{1}{2}.$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos x=a,\quad x=\pm\arccos a+2\pi\cdot n,\ n\in\boldsymbol{Z};\\ \arccos(-a)=\pi-\arccos a.\end{array}}$$

$$\cos(4x) = -\frac{1}{2},$$
$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$4x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi \cdot n,$$
$$4x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi \cdot n,$$
$$4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot n,$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

Atsakymas. $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

4b. $\cos(2x) - \sin x = 0.$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Vienodiname kampus:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Kosinusą keičiame sinusu:

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0,$$
$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

Pasižymime $\sin x = y$, $y \in [-1; 1]$. Gauname kvadratinę lygtį:

$$1 - 2y^2 - y = 0,$$
$$2y^2 + y - 1 = 0,$$
$$y_1 = \frac{-1-3}{4} = -1, \quad y_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Grįžtame prie x:

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k.$$

Atsakymas. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$, $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k$ $(n, k \in \boldsymbol{Z})$.

4c. $\cos x = \cos(5x)$.

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Narius keliame į vieną pusę ir skaidome dauginamaisiais:

$$\cos x - \cos(5x) = 0,$$
$$-2\sin\frac{x+5x}{2}\sin\frac{x-5x}{2} = 0 \;\Big|\; : (-2),$$
$$\sin(3x)\cdot\sin(-2x) = 0,$$
$$-\sin(3x)\cdot\sin(2x) = 0 \;\Big|\; \cdot (-1),$$
$$\sin(3x)\cdot\sin(2x) = 0.$$

Sandauga lygi 0, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus 0.

1) $\sin(3x) = 0, \quad 3x = \pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$
$$x = \frac{\pi}{3}\cdot n.$$
2) $\sin(2x) = 0, \quad 2x = \pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$
$$x = \frac{\pi}{2}\cdot k.$$

Atsakymas. $x = \frac{\pi}{3}\cdot n$, $x = \frac{\pi}{2}\cdot k$ $(n, k \in \boldsymbol{Z})$.

4d. $\sin^2(2x) = 1$.

I būdas.

Lygybė yra teisinga, kai

$\sin(2x) = 1$ arba $\sin(2x) = -1$,

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \qquad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi\cdot k; \qquad x = -\frac{\pi}{4} + \pi\cdot n.$$

II būdas.

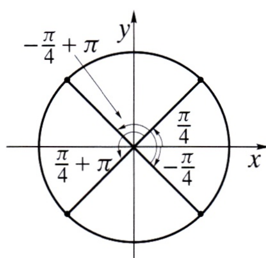
$$1-\sin^2(2x)=0,\quad \cos^2(2x)=0,\quad \cos(2x)=0,$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\quad k\in \boldsymbol{Z},$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot k.$$

III būdas.

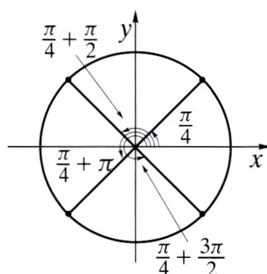
$$\boxed{1-\cos(2\alpha)=2\sin^2 x.}$$

$$\sin^2(2x)=1\ \big|\cdot 2,$$
$$2\sin^2(2x)=2,$$
$$1-\cos(2\cdot 2x)=2,$$
$$-\cos(4x)=1\ \big|\cdot(-1),$$
$$\cos(4x)=-1,$$
$$4x=\pi+2\pi n\ \big|:4,\quad n\in \boldsymbol{Z},$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$$

Pastebėkime, kad spręsdami skirtingais būdais gavome skirtingas atsakymų išraiškas. Iš tikrųjų abiem atvejais atsakymai reiškia tuos pačius kampus:



I būdas



II būdas

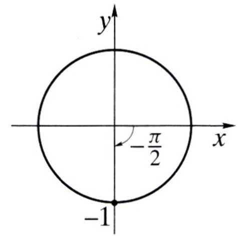
Atsakymas. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot k\ (k\in \boldsymbol{Z})$.

4e. $\sin(60^\circ+x)-\sin(60^\circ-x)=-1.$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.}$$

$$2\cos\frac{60^\circ+x+60^\circ-x}{2}\cdot\sin\frac{60^\circ+x-60^\circ+x}{2}=-1,$$

$$2\cos 60^\circ \cdot \sin x = -1,$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = -1,$$
$$\sin x = -1,$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$



Atsakymas. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k$ $(k \in \boldsymbol{Z})$.

5a. $\operatorname{tg} x = \sin x$.

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.}$$

Randame lygties apibrėžimo sritį:

$$\cos x \neq 0, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Kadangi joje kosinusas nelygus nuliui, tai padauginę iš kosinuso, gausime ekvivalenčią lygtį:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \;\Big|\cdot \cos x,$$
$$\sin x = \sin x \cdot \cos x.$$

Padaliję abi puses iš $\sin x$, prarastume sprendinius $\sin x = 0$. Todėl geriausia $\sin x$ iškelti prieš skliaustus:

$$\sin x - \sin x \cdot \cos x = 0,$$
$$\sin x \cdot (1 - \cos x) = 0,$$

$\sin x = 0,$ arba $1 - \cos x = 0,$

$x = \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$ $\qquad \cos x = 1,$

$x = 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$

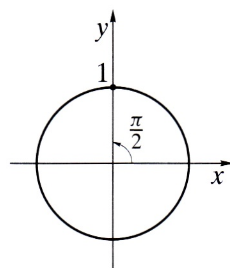
Lygties $\operatorname{tg} x = \sin x$ sprendiniai yra $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Pastaba. Sprendiniai $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, įeina į sprendinius $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Mažiausias teigiamas sprendinys yra $x = \pi$.

Atsakymas. π.

5b. $\frac{2-\sin^2 x}{\sin x} = \sin x.$

Abi puses dauginame iš $\sin x$ (vėliau patikrinsime, ar jis nelygus nuliui):



$$2 - \sin^2 x = \sin^2 x,$$
$$2 - 2\sin^2 x = 0,$$
$$1 - \sin^2 x = 0,$$
$$\cos^2 x = 0, \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Su šitomis reikšmėmis sinusas tikrai nelygus nuliui. Mažiausias teigiamas sprendinys yra $x = \frac{\pi}{2}$.

Atsakymas. $\frac{\pi}{2}$.

5c. $(\cos x + 3)\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,\ x \in [-90°; 90°].$

Sandauga lygi 0, kai bent vienas dauginamasis lygus 0:

$$\cos x + 3 = 0 \quad \text{arba} \quad \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Sprendžiame kiekvieną lygtį atskirai:

$$\cos x + 3 = 0, \quad \cos x = -3.$$

Ši lygtis sprendinių neturi, nes kosinusas įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$, o $-3 \notin [-1; 1]$.

$$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n.$$

Parašykime sprendinius laipsniais:

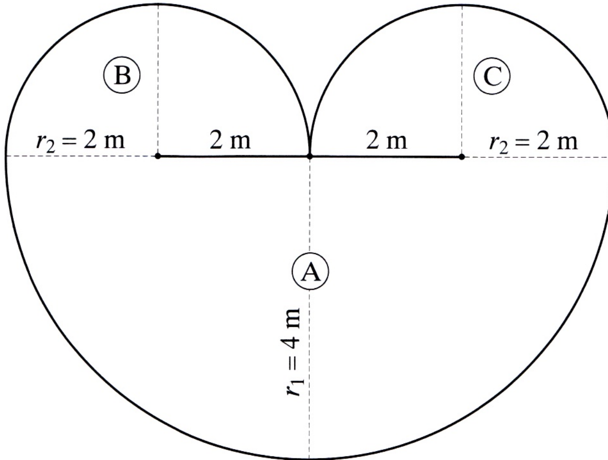
$$x = \pm \frac{180°}{6} + 2 \cdot 180° \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \quad x = \pm 30° + 360° \cdot n.$$

Išrenkame sprendinius, priklausančius intervalui $[-90°; 90°]$.
Akivaizdu, kad tik sprendiniai $x = -30°$ ir $x = 30°$ įeina į šį intervalą.
Pastaba. Galima iš karto pastebėti, kad $\cos x + 3 \neq 0$, ir spręsti lygtį $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Atsakymas. $-30°$, $30°$.

6. Ganykloje yra 4 m ilgio tiesi tvora. Ožka pririšta 4 m ilgio virve prie kuolo, esančio tos tvoros viduryje. Apskaičiuokite, kokiame plote gali ganytis ožka. Atsakymą parašykite kvadratinio metro tikslumu.

Sprendimas. Pasidarykime brėžinį.



Pastebime, kad ožka gali ganytis trijų pusskritulių plote.

Pusskritulio A spindulys yra 4 m. Pusskrituliai B ir C yra lygūs — jų spinduliai yra po 2 m.

Duota: $r_1 = 4$ m, $r_2 = 2$ m.

Rasti: S.

Sprendimas. Skritulio plotas $S = \pi R^2$.

A dalies plotas: $S_A = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 8\pi$ (m^2).

B dalies plotas: $S_B = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$ (m^2).

C dalies plotas: $S_C = S_B = 2\pi$ (m^2).

Visas plotas

$$S = S_A + S_B + S_C = 8\pi + 2\pi + 2\pi = 12\pi\,(\text{m}^2).$$

Imkime $\pi = 3{,}14$. Tada

$$S = 12 \cdot 3{,}14 = 37{,}68 \approx 38\,(\text{m}^2).$$

Atsakymas. 38 m^2.

Skaičių sekos

K16 (17.1–17.5)

1. Aritmetinės progresijos n-tasis narys išreikštas formule $a_n = -0{,}5n + 2$.
a) Apskaičiuokite šios progresijos skirtumą ir a_8.
b) Ar skaičius -5 yra šios progresijos narys?
c) Apskaičiuokite šios progresijos pirmųjų šešių narių sumą.

2. Seka apibrėžta formule:
a) $x_n = 14n - 8$;
b) $y_n = n^2 - 3$.
Ar ši seka yra aritmetinė, ar geometrinė progresija? Atsakymą pagrįskite.

3. a) Tarp skaičių -18 ir -2 įrašykite keturis skaičius, kad visi šeši skaičiai sudarytų aritmetinę progresiją.
b) Apskaičiuokite pirmąjį aritmetinės progresijos narį, jei $d = 3$, o $S_8 - S_7 = 108$.
c) Duota geometrinė progresija (b_n) tokia, kad
$$\begin{cases} b_1 + b_6 = 132, \\ b_2 + b_7 = 264. \end{cases}$$
Su kuria n reikšme $S_n = 508$?

4. Išspręskite lygtį.
a) $\frac{1}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$;
b) $1 + 4 + 7 + \cdots + x = 117$;
c) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^x = (0{,}5)^{-21}$.

5. Parašykite paprastąja trupmena skaičių:
a) $1,(3)$;
b) $0{,}33(345)$.

6. Aritmetinę progresiją sudaro trys nariai, kurių suma lygi 30. Jei iš antrojo šios progresijos nario atimtume 2, tai gauti nariai sudarytų geometrinę progresiją. Raskite pradinius aritmetinės progresijos narius.

7. Daugiakampio kampų didumai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas lygus 10°. Didžiausias šio daugiakampio kampas lygus 170°. Kiek kraštinių turi šis daugiakampis?

1. Aritmetinės progresijos n-tasis narys išreikštas formule $a_n = 5n - 4$.
a) Apskaičiuokite šios progresijos skirtumą ir a_6.
b) Ar skaičius 26 yra šios progresijos narys?
c) Apskaičiuokite šios progresijos pirmųjų aštuonių narių sumą.

2. Seka apibrėžta formule:
a) $x_n = n + 4$;
b) $y_n = 2 \cdot 3^n$.
Ar ši seka yra aritmetinė, ar geometrinė progresija? Atsakymą pagrįskite.

3. a) Tarp skaičių 5 ir $\frac{32}{625}$ įrašykite keturis skaičius, kad visi šeši skaičiai sudarytų geometrinę progresiją.
b) Apskaičiuokite pirmąjį geometrinės progresijos narį, jei $q = \frac{1}{2}$, o $S_6 - S_5 = 31\frac{1}{4}$.
c) Duota aritmetinė progresija (a_n) tokia, kad
$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 15, \\ a_2 + a_7 = 27. \end{cases}$$
Su kuria n reikšme $S_n = 630$?

4. Išspręskite lygtį.
a) $\frac{1}{6}x^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$;
b) $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$;
c) $2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^8 \cdot \ldots \cdot 2^{3x-1} = 8^5$.

5. Parašykite paprastąja trupmena skaičių:
a) $1,(2)$;
b) $6,(125)$.

6. Trys skaičiai, kurių pirmasis lygus 24, sudaro aritmetinę progresiją. Jei vietoj pirmojo šios progresijos nario paimtume 32, tai gauti nariai sudarytų geometrinę progresiją. Raskite pradinius aritmetinės progresijos narius.

7. Daugiakampio kampų didumai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas lygus 5°. Didžiausias šio daugiakampio kampas lygus 160°. Apskaičiuokite daugiakampio kraštinių skaičių.

Skaičių sekos

1.

Seką a_1, a_2, a_3, ..., a_n vadiname aritmetine progresija, jei jos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi d.

$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad \ldots, \quad a_n = a_{n-1} + d.$

Skaičius d vadinamas aritmetinės progresijos skirtumu,
a_1 — pirmasis aritmetinės progresijos narys,
a_2 — antrasis aritmetinės progresijos narys,
....
a_n — n-tasis aritmetinės progresijos narys.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumą galima apskaičiuoti taip:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n.$$

1a. $a_n = -0{,}5 \cdot n + 2$. Rasti d ir a_8.

$a_8 = -0{,}5 \cdot 8 + 2 = -4 + 2 = -2.$
$a_7 = -0{,}5 \cdot 7 + 2 = -3{,}5 + 2 = -1{,}5,$
$d = a_8 - a_7 = -2 - (-1{,}5) = -0{,}5.$

Atsakymas. $d = -0{,}5$, $a_8 = -2$.

1b. Ar skaičius -5 yra aritmetinės progresijos $a_n = -0{,}5 \cdot n + 2$ narys?
Ieškome n, su kuriuo

$-0{,}5 \cdot n + 2 = -5,$
$-0{,}5 \cdot n = -7,$
$n = 14.$

Tai reiškia, kad -5 yra 14-tasis duotosios progresijos narys. Jei būtume gavę n reikšmę, kuri nėra natūralusis skaičius, tai reikštų, kad skaičius -5 nėra tos progresijos narys.

Atsakymas. Taip.

1c. Apskaičiuokite aritmetinės progresijos $a_n = -0{,}5n + 2$ pirmųjų šešių narių sumą.

I būdas.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -0{,}5 \cdot 1 + 2 = 1{,}5,\\
a_2 &= -0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1,\\
a_3 &= -0{,}5 \cdot 3 + 2 = 0{,}5,\\
a_4 &= -0{,}5 \cdot 4 + 2 = 0,\\
a_5 &= -0{,}5 \cdot 5 + 2 = -0{,}5,\\
a_6 &= -0{,}5 \cdot 6 + 2 = -1.
\end{aligned}
$$

Sudedame:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1{,}5 + 1 + 0{,}5 + 0 - 0{,}5 - 1 = 1{,}5.$$

II būdas.

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1{,}5, \quad d = -0{,}5, \quad n = 6,\\
&S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n,\\
&S_6 = \frac{2 \cdot 1{,}5 + (6-1) \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 6 =\\
&\quad = \big(3 + (-2{,}5)\big) \cdot 3 = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5.
\end{aligned}
$$

III būdas.

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1{,}5, \quad a_6 = -0{,}5 \cdot 6 + 2 = -1, \quad n = 6,\\
&S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_6 = \frac{1{,}5 + (-1)}{2} \cdot 6 = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5.
\end{aligned}
$$

Atsakymas. 1,5.

2.

Seką a_1, a_2, a_3, ..., a_n vadiname aritmetine progresija, jei jos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi d.

Seką b_1, b_2, b_3, ..., b_n vadiname geometrine progresija, jei jos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, sudaugintam su tuo pačiu skaičiumi $q \neq 0$.

2a. Ar seka, apibrėžta formule $x_n = 14n - 8$, yra aritmetinė, ar geometrinė progresija?

I būdas. Surašykime keletą pirmųjų sekos narių:

$$x_1 = 14 \cdot 1 - 8 = 6,$$
$$x_2 = 14 \cdot 2 - 8 = 20,$$
$$x_3 = 14 \cdot 3 - 8 = 34,$$
$$x_4 = 14 \cdot 4 - 8 = 48,$$
....

Matome, kad

$$x_2 = x_1 + 14,$$
$$x_3 = x_2 + 14,$$
$$x_4 = x_2 + 14,$$
....

Vadinasi, duotoji seka yra aritmetinė progresija. Kad seka nėra geometrinė progresija matome, pavyzdžiui, iš to, kad

$$20 : 6 \neq 34 : 20.$$

II būdas. Raskime gretimų narių skirtumą $x_n - x_{n-1}$:

$$x_n = 14n - 8,$$
$$x_{n-1} = 14 \cdot (n-1) - 8 = 14n - 14 - 8 = 14n - 22,$$
$$x_n - x_{n-1} = 14n - 8 - (14n - 22) =$$
$$= 14n - 8 - 14n + 22 = 14.$$

Tai reiškia, kad iš bet kurio sekos nario atėmę prieš jį esantį, gausime 14. Vadinasi, duotoji seka yra aritmetinė progresija.
Raskime gretimų narių santykį:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{14n - 8}{14n - 22}.$$

Akivaizdu, kad šio santykio reikšmė priklauso nuo n reikšmės, t. y. santykis nėra pastovus skaičius. Vadinasi, duotoji seka nėra geometrinė progresija.

Atsakymas. Aritmetinė progresija.

2b. Ar seka, apibrėžta formule $y_n = n^2 - 3$, yra aritmetinė, ar geometrinė progresija?

I būdas. Surašykime keletą pirmųjų sekos narių:

$$y_1 = 1^2 - 3 = -2,$$
$$y_2 = 2^2 - 3 = 1,$$
$$y_3 = 3^2 - 3 = 6,$$
$$y_4 = 4^2 - 3 = 13.$$

Matome, kad

$$1 - (-2) \neq 6 - 1; \qquad \frac{1}{-2} \neq \frac{6}{1}.$$

Vadinasi, duotoji seka nėra nei aritmetinė, nei geometrinė progresija.

II būdas. Raskime skirtumą $y_n - y_{n-1}$:

$$y_n - y_{n-1} = n^2 - 3 - \big((n-1)^2 - 3\big) = n^2 - 3 - (n^2 - 2n + 1 - 3) =$$
$$= n^2 - 3 - n^2 + 2n + 2 = 2n - 1.$$

Tai reiškia, kad gretimų narių skirtumo reikšmė nėra pastovi — seka nėra aritmetinė progresija.
Raskime santykį $\frac{y_n}{y_{n-1}}$:

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{n^2 - 3}{n^2 - 2n - 2}.$$

Matome, kad ir santykis nelygus pastoviam skaičiui.

Atsakymas. Seka nėra nei aritmetinė progresija, nei geometrinė progresija.

3a. Tarp skaičių -18 ir -2 įrašykite keturis skaičius, kad visi šeši skaičiai sudarytų aritmetinę progresiją.

Sprendimas.

$$-18, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad -2.$$

Remkimės formule $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Tada:

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d = a_1 + 5d,$$
$$-2 = -18 + 5 \cdot d,$$
$$5d = 16,$$
$$d = 3{,}2.$$
$$a_2 = -18 + 3{,}2 = -14{,}8,$$
$$a_3 = -14{,}8 + 3{,}2 = -11{,}6,$$
$$a_4 = -11{,}6 + 3{,}2 = -8{,}4,$$
$$a_5 = -8{,}4 + 3{,}2 = -5{,}2.$$

Atsakymas. -18; $-14{,}8$; $-11{,}6$; $-8{,}4$; $-5{,}2$; -2.

3b. Apskaičiuokite pirmąjį aritmetinės progresijos narį, jei $d = 3$, o $S_8 - S_7 = 108$.

Sprendimas. Pastebėkime, kad skirtumas $S_8 - S_7$ reiškia 8-ąjį progresijos narį. Vadinasi, $a_8 = 108$.
Pirmąjį narį rasime remdamiesi formule $a_8 = a_1 + 7d$. Turėsime:

$$108 = a_1 + 7 \cdot 3, \quad a_1 = 108 - 21, \quad a_1 = 87.$$

Atsakymas. 87.

3c. Duota geometrinė progresija (b_n) tokia, kad
$$\begin{cases} b_1 + b_6 = 132, \\ b_2 + b_7 = 264. \end{cases}$$
Su kuria n reikšme $S_n = 508$?

Seką b_1, b_2, b_3, ..., b_n vadiname geometrine progresija, jei jos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, padaugintam iš to paties skaičiaus $q \neq 0$.

$$b_2 = b_1 \cdot q, \quad b_3 = b_2 \cdot q, \quad ..., \quad b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Skaičius q vadinamas geometrinės progresijos vardikliu,
b_1 — pirmasis geometrinės progresijos narys,
b_2 — antrasis geometrinės progresijos narys,
................,
b_n — n-tasis geometrinės progresijos narys,
$b_n = b_1 q^{n-1}$.

Pirmųjų n narių sumą galima apskaičiuoti taip:
$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \frac{b_1 - q b_n}{1-q}, \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Pakeiskime lygčių sistemos $\begin{cases} b_1 + b_6 = 132, \\ b_2 + b_7 = 264 \end{cases}$ narius b_6, b_2, b_7 pirmojo nario b_1 ir vardiklio q sandaugomis — gausime lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais b_1 ir q:

$$b_6 = b_1 \cdot q^5, \quad b_2 = b_1 \cdot q, \quad b_7 = b_1 \cdot q^6;$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^5 = 132, \\ b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^6 = 264; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 \cdot (1 + q^5) = 132, \\ b_1 q \cdot (1 + q^5) = 264. \end{cases}$$

Padalykime vieną sistemos lygtį iš kitos:

$$\frac{b_1 \cdot (1 + q^5)}{b_1 q \cdot (1 + q^5)} = \frac{132}{264}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, \quad q = 2.$$

Raskime b_1:

$$b_1(1 + q^5) = 132, \quad b_1(1 + 2^5) = 132, \quad b_1 \cdot 33 = 132, \quad b_1 = 4.$$

Žinodami pirmųjų n narių sumą $S_n = 508$, pirmąjį narį $b_1 = 4$ ir vardiklį $q = 2$, galime apskaičiuoti skaičių n. Remsimės formule

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Gauname:

$$508 = \frac{4 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2}, \quad -508 = 4 \cdot (1 - 2^n),$$
$$1 - 2^n = -127, \quad 2^n = 128, \quad 2^n = 2^7, \quad n = 7.$$

Tai reiškia, kad sumą 508 gausime sudėję pirmuosius 7 geometrinės progresijos narius. *Atsakymas*. 7.

4a. $\frac{1}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

> Jeigu geometrinės progresijos vardiklis q moduliu mažesnis už 1, t. y. $|q| < 1$, tai geometrinę progresiją vadiname nykstamąja.
>
> Nykstamosios geometrinės progresijos suma: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \frac{b_1}{1-q}$.

Dešinioji duotosios lygybės pusė yra nykstamoji geometrinė progresija, kurios $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

Raskime jos sumą:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Turime lygtį:

$$\frac{1}{2}x^2=2, \quad x^2=4, \quad x_1=-2, \quad x_2=2.$$

Atsakymas. -2; 2.

4b. $1+4+7+\cdots+x=117.$
Kairėje lygybės pusėje yra aritmetinės progresijos, kurios $a_1=1$, $d=3$, $a_n=x$, n narių suma.
Remdamiesi formule $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ raskime tą sumą:

$$1+4+7+\cdots+x=\frac{1+x}{2}\cdot n.$$

Remdamiesi n-tojo nario formule $a_n=a_1+d(n-1)$ raskime n:

$$x=1+3(n-1), \quad x=3n-2, \quad n=\frac{x+2}{3}.$$

Vadinasi, turime lygtį:

$$\frac{1+x}{2}\cdot\frac{x+2}{3}=117,$$
$$(1+x)(x+2)=117\cdot 6,$$
$$x^2+3x-700=0, \quad D=2809=53^2, \quad x_1=25, \quad x_2=-28.$$

Akivaizdu, kad reikšmė $x_2=-28$ lygčiai netinka.

Atsakymas. 25.

4c. $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^x=(0{,}5)^{-21}.$

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}, \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$

$$2^{1+2+3+\cdots+x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-21},$$
$$2^{1+2+3+\cdots+x}=2^{21},$$
$$1+2+3+\cdots+x=21.$$

Kairioji lygties pusė yra aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = x$, pirmųjų x narių suma ($n = x$). Randame ją:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{1+x}{2} \cdot x.$$

Turime lygtį:

$$\frac{1+x}{2} \cdot x = 21, \quad (1+x) \cdot x = 42, \quad x^2 + x - 42 = 0,$$
$$D = 169 = 13^2,$$
$$x_1 = 6, \quad x_2 = -7 \text{ (netinka, nes kairė lygties pusė netenka prasmės).}$$

Atsakymas. 6.

5a. Parašykite paprastąja trupmena skaičių $1,(3)$.

Paprastosios trupmenos — tai skaičiai, kurių pavidalas yra $\frac{a}{b}$, $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$.

I būdas. Nesunku pastebėti, kad

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333.... = 0,(3).$$

II būdas.

$$0,(3) = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots.$$

Gautoji suma lygi nykstamosios geometrinės progresijos, kurios $b_1 = 0{,}3$, $q = \frac{0{,}03}{0{,}3} = 0{,}1$, sumai:

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$
$$1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Atsakymas. $1,(3) = \frac{4}{3}$.

5b. Parašykite paprastąja trupmena skaičių $0{,}33(345)$.

$$0{,}33(345) = 0{,}33 + 0{,}00345 + 0{,}00000345 + 0{,}00000000345 + \cdots$$

Gautoji suma lygi nykstamosios geometrinės progresijos, kurios

$$b_1 = 0{,}00345, \quad q = \frac{0{,}00000345}{0{,}00345} = 0{,}001,$$

sumai.

Apskaičiuojame tą sumą S:

$$S = \frac{0{,}00345}{1 - 0{,}001} = \frac{0{,}00345}{0{,}999} = \frac{345}{99\,900}.$$

Prie šios sumos pridedame $0{,}33$:

$$0{,}33 + \frac{345}{99\,900} = \frac{33}{100} + \frac{345}{99\,900} = \frac{999 \cdot 33 + 345}{99\,900} = \frac{8328}{24\,975} = \frac{2776}{8325}.$$

Atsakymas. $\frac{2776}{8325}$.

6. Aritmetinę progresiją sudaro trys nariai, kurių suma lygi 30. Jei iš antrojo šios progresijos nario atimtume 2, tai gauti nariai sudarytų geometrinę progresiją. Raskite pradinius aritmetinės progresijos narius.

Sprendimas.

a_1, a_2, a_3 — aritmetinė progresija, kurios $a_1 + a_2 + a_3 = 30$.

a_1, $a_2 - 2$, a_3 — geometrinė progresija.

Aritmetinės progresijos viduriniojo nario savybė:

$a_n = \frac{a_{n-m} + a_{n+m}}{2}$,

pavyzdžiui, $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$, $a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}$.

I būdas. Taikome aritmetinės progresijos viduriniojo nario savybę:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad a_1 + a_3 = 2a_2.$$

Kadangi $a_1 + a_2 + a_3 = 30$, o $a_1 + a_3 = 2a_2$, tai

$$2a_2 + a_2 = 30, \quad 3a_2 = 30, \quad a_2 = 10.$$

Vadinasi, $a_1 + a_3 = 20$.

Geometrinės progresijos antrasis narys yra $a_2 - 2 = 10 - 2 = 8$.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 20, \\ \frac{8}{a_1} = \frac{a_3}{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_3 = 20, \\ a_1 \cdot a_3 = 64; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 20 - a_3, \\ (20 - a_3) \cdot a_3 = 64. \end{cases}$$

Iš antrosios sistemos lygties gauname kvadratinę lygtį:

$$a_3^2 - 20a_3 + 64 = 0,$$

$$D = 144 = 12^2,$$

$$a_3 = 4 \quad \text{arba} \quad a_3 = 16.$$

Kai $a_3 = 4$ turime aritmetinę progresiją, kurios

$$a_1 + 10 + 4 = 30, \quad a_1 = 16.$$

Tikriname — seka 16, 8, 4 yra geometrinė progresija ($q = \frac{1}{2}$).
Kai $a_3 = 16$ turime:

$$a_1 + 10 + 16 = 30, \quad a_1 = 4.$$

Seka 4, 8, 16 yra geometrinė progresija ($q = 2$).
Sąlygą tenkina dvi aritmetinės progresijos:

$$4, 10, 16; \quad 16, 10, 4.$$

II būdas. Sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 30, \\ \frac{a_2-2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2-2}. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties turime:

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30,$$
$$3a_1 + 3d = 30 \,\big|\, : 3, \quad a_1 + d = 10, \quad d = 10 - a_1.$$

Iš antrosios lygties turime:

$$\frac{a_1 + d - 2}{a_1} = \frac{a_1 + 2d}{a_1 + d - 2}.$$

Į šią lygybę įstatome reikšmę $d = 10 - a_1$:

$$\frac{a_1 + 10 - a_1 - 2}{a_1} = \frac{a_1 + 2(10 - a_1)}{a_1 + 10 - a_1 - 2},$$
$$\frac{8}{a_1} = \frac{a_1 + 20 - 2a_1}{8}, \qquad 64 = 20a_1 - a_1^2, \qquad a_1^2 - 20a_1 + 64 = 0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius $a_1 = 4$, $a_1 = 16$.
Kai $a_1 = 4$, tai $d = 10 - a_1 = 10 - 4 = 6$.
Kai $a_1 = 16$, tai $d = 10 - a_1 = 10 - 16 = -6$.
Belieka apskaičiuoti kitus abiejų progresijų narius.

Atsakymas. 4, 10, 16; 16, 10, 4.

7. Daugiakampio kampų didumai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas lygus 10°. Didžiausias šio daugiakampio kampas lygus 170°. Kiek kraštinių turi šis daugiakampis?

> n-kampis turi n kraštinių,
> n-kampio visų kampų didumų suma lygi $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Sprendimas.

I būdas. Daugiakampis mažiausiai gali turėti tris kampus. Tada tų kampų didumai būtų:

$$170^\circ,\ 160^\circ,\ 150^\circ.$$

Bet toks trikampis neegzistuoja, nes

$$170^\circ + 160^\circ + 150^\circ = 480^\circ,$$

o trikampio kampų suma lygi

$$(3-2)\cdot 180^\circ = 180^\circ.$$

Tikriname keturkampį ($n = 4$):

$$170^\circ + 160^\circ + 150^\circ + 140^\circ = 620^\circ.$$

Bet keturkampio kampų suma lygi

$$(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Tikriname toliau:

- kai $n = 5$, tai

$$170^\circ + 160^\circ + 150^\circ + 140^\circ + 130^\circ = 750^\circ, \quad \text{bet} \quad (5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ;$$

- kai $n = 6$, tai

$$170^\circ + \cdots + 120^\circ = 870^\circ, \quad \text{bet} \quad (6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ;$$

- kai $n = 7$, tai

$$170^\circ + \cdots + 110^\circ = 980^\circ, \quad \text{bet} \quad (7-2)\cdot 180^\circ = 900^\circ;$$

- kai $n = 8$, tai

$$170^\circ + \cdots + 100^\circ = 1080^\circ \quad \text{ir} \quad (8-2)\cdot 180^\circ = 1080^\circ.$$

Nustatėme, kad yra daugiakampis — aštuonkampis ($n = 8$), kurio didžiausias kampas lygus 170°, o kitų kampų dydžiai yra 10° laipsnių mažesni. Tikrindami toliau, kai $n = 9$, ..., matysime, kad tokie n-kampiai neegzistuoja.

II būdas. Spręskime remdamiesi aritmetinės progresijos formulėmis.

$a_n = a_1 + d(n-1)$ — n-tasis narys išreikštas 1-uoju nariu, skirtumu ir n.

$S_n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2} \cdot n$ — n narių sumos formulė.

Žinome aritmetinės progresijos n-tąjį narį ir skirtumą:

$$a_n = 170, \quad d = 10.$$

Iš aritmetinės progresijos n-tojo nario formulės a_1 galime išsireikšti per n ir d:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d,$$
$$170 = a_1 + (n-1)\cdot 10,$$
$$a_1 = 170 - (n-1)\cdot 10,$$
$$a_1 = 170 - 10n + 10,$$
$$a_1 = 180 - 10n.$$

Žinome, kad šios progresijos narių suma lygi $(n-2)\cdot 180$ (laipsnių nerašysime). Vadinasi, teisinga lygybė

$$\frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n = (n-2)\cdot 180.$$

Įstatome $a_1 = 180 - 10n$ ir $d = 10$:

$$(180 - 10n + 5n - 5)\cdot n = (n-2)\cdot 180,$$
$$(175 - 5n)\cdot n = (n-2)\cdot 180,$$
$$175n - 5n^2 - 180n + 360 = 0,$$
$$-5n^2 - 5n + 360 = 0,$$
$$n^2 + n - 72 = 0,$$
$$D = 289 = 17^2,$$
$$n_1 = 8, \quad n_2 = -9 \quad (n \text{ reikšmė neigiama būti negali}).$$

Vadinasi, $n = 8$.

Atsakymas. 8.

Įvykiai ir tikimybės

K17 (19–21)

1. Urnoje yra trys skaičiais 1, 3 ir 5 pažymėti rutuliai. Atsitiktinai vieną po kito traukiame du rutulius.

1) Iš ištrauktų rutulių numerių sudarome dviženklį skaičių: pirmojo ištraukto rutulio numeris reiškia dešimtis, antrojo — vienetus. Surašykite visus tokiu būdu galimus gauti dviženklius skaičius.

2) Nagrinėkime tokius įvykius:
A — „pirmojo rutulio numeris yra didesnis negu antrojo";
B — „antrojo rutulio numeris yra arba 3, arba 5".
Surašykite, kas sudaro įvykius:
$A\backslash B$, $B\backslash A$, $A\backslash\overline{B}$, $\overline{B}\backslash\overline{A}$, $A\cap B$.

2. a) Apskaičiuokite: A_9^3; C_{10}^7.

b) Duoti 6 apskritimo taškai. Kiek galima nubrėžti skirtingų stygų, jungiančių du iš tų taškų?

c) Kiek triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 2, 4, 6, 8?

3. a) Į knygų lentyną atsitiktinai paimamos ir dedamos 4 istorijos ir 3 matematikos knygos. Kokia tikimybė, kad visos 3 matematikos knygos bus sudėtos greta?

b) Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe $\frac{1}{3}$. Jis šauna 3 kartus. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
C — šaulys nepataikė daugiau kaip du kartus;
D — šaulys pataikė 1 kartą.

c) Knygoje yra 300 puslapių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atversto puslapio numeris yra arba skaičiaus 20, arba skaičiaus 25 kartotinis?

4. a) Atskirose kortelėse surašytos raidės A, R, V, C, O, K, M, S, E, F. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai imdami penkias korteles ir dėdami jas į eilę, gausime žodį VORAS.

b) Ant stalo išdėliotos 9 kortelės, sunumeruotos nuo 1 iki 9. Jos apverstos ir sumaišytos. Atsitiktinai atverstos 3 kortelės. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — visų trijų atverstų kortelių numeriai yra lyginiai;
B — visų trijų atverstų kortelių numeriai yra didesni už 4;
C — tarp atverstųjų kortelių yra kortelė su numeriu 5.

c) Klasės mokiniai Naujųjų metų proga sveikindami savo bendraklasius, kiekvienas kiekvienam išsiuntė po atviruką. Buvo išsiųsti 756 atvirukai. Kiek mokinių yra klasėje?

5. Kambaryje yra 4 futbolo ir 8 tinklinio kamuoliai. Jonas nežiūrėdamas paima 6 kamuolius. Kokia tikimybė, kad Jonas paėmė ne daugiau kaip 2 futbolo kamuolius?

1. Urnoje yra trys skaičiais 2, 3 ir 4 pažymėti rutuliai. Atsitiktinai vieną po kito traukiame du rutulius.

1) Iš ištrauktų rutulių numerių sudarome dviženklį skaičių: pirmojo ištraukto rutulio numeris reiškia dešimtis, antrojo — vienetus. Surašykite visus tokiu būdu galimus gauti dviženklius skaičius.

2) Nagrinėkime tokius įvykius:
A — „pirmojo rutulio numeris yra didesnis negu antrojo";
B — „antrojo rutulio numeris yra arba 3, arba 4".
Surašykite, kas sudaro įvykius:
$A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus \overline{B}$, $\overline{B} \setminus \overline{A}$, $A \cap B$.

2. a) Apskaičiuokite: A_{10}^4; C_9^7.

b) Kiek įstrižainių turi iškilasis dešimtkampis?

c) Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima parašyti penkiais nelyginiais skaitmenimis 1, 3, 5, 7 ir 9, jeigu skaitmenys tame pačiame skaičiuje nesikartoja?

3. a) Ant ilgo suolo atsitiktinai susėdo 2 mergaitės ir 5 berniukai. Kokia tikimybė, kad visi berniukai sėdi greta vienas kito?

b) Tikimybė, kad studentas išlaikys pirmą egzaminą, lygi 0,9, kad išlaikys antrą — 0,85, o kad išlaikys trečią — 0,8. Kokia tikimybė studentui išlaikyti ne mažiau kaip du egzaminus?

c) Iš natūraliųjų skaičių eilės nuo 1 iki 1000 atsitiktinai imamas skaičius. Kam lygi tikimybė, kad tas skaičius bus dalus arba iš 3, arba iš 4?

4. a) Atskirose kortelėse surašytos raidės L, A, R, Š, Y, D, M, E, F, K. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai imdami šešias korteles ir dėdami jas į eilę, gausime žodį LYDEKA.

b) Dėžėje yra 10 vienodų kaladėlių, sunumeruotų nuo 2 iki 11. Nežiūrint paimamos 3 kaladėlės. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — tarp paimtų kaladėlių nėra kaladėlės su 2-uoju numeriu;
B — visų paimtų kaladėlių numeriai mažesni už 6;
C — visų paimtų kaladėlių numeriai yra nelyginiai.

c) Futbolo turnyre buvo sužaistos 182 rungtynės. Kiekviena komanda žaidė su visomis likusiomis komandomis savo ir priešininkų aikštėse po vieną kartą. Kiek komandų dalyvavo turnyre?

5. Iš 10 loterijos bilietų, tarp kurių 2 bilietai yra laimingi, atsitiktinai ištraukiami 5 bilietai. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktų bilietų bent 1 bus laimingas?

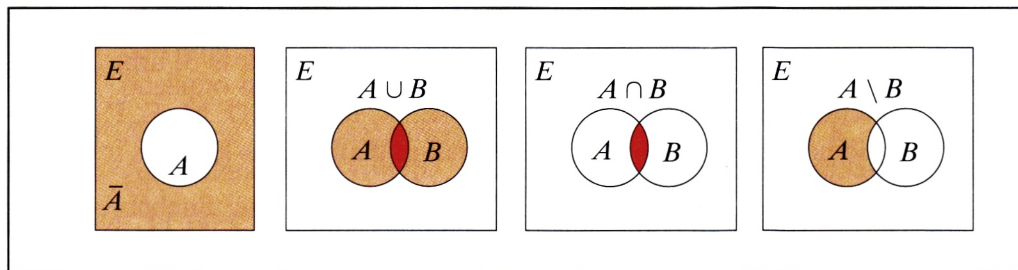
1. 1) Urnoje yra trys skaičiais 1, 3 ir 5 pažymėti rutuliai. Atsitiktinai vieną po kito traukiame du rutulius.
Iš ištrauktų rutulių numerių sudarome dviženklį skaičių: pirmojo ištraukto rutulio numeris reiškia dešimtis, antrojo — vienetus. Surašykite visus tokiu būdu galimus gauti dviženklius skaičius.

Sprendimas. Svarbu, kad nesusipainiotume pasirinkti skaitmenų surašymo tvarką. Galima samprotauti taip:

- pirmąjį galima ištraukti 1, tada antrasis bus arba 3, arba 5:
  13, 15;
- pirmąjį galima ištraukti 3, tada antrasis bus arba 1, arba 5:
  31, 35;
- pirmąjį galima ištraukti 5, tada antrasis bus arba 1, arba 3:
  51, 53.

Atsakymas. 13, 15, 31, 35, 51, 53.

2) Urnoje yra trys skaičiais 1, 3 ir 5 pažymėti rutuliai. Atsitiktinai vieną po kito traukiame du rutulius.
Nagrinėkime tokius įvykius:
A — „pirmojo rutulio numeris yra didesnis negu antrojo“;
B — „antrojo rutulio numeris yra arba 3, arba 5“.
Surašykite, kas sudaro įvykius:
$A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\setminus\overline{B}$, $\overline{B}\setminus\overline{A}$, $A\cap B$.



Sprendimas. Surašykime įvykiui A palankias baigtis:

$$A = \{31, \quad 51, \quad 53\}.$$

Surašykime įvykiui B palankias baigtis:

$$B = \{13, \quad 15, \quad 35, \quad 53\}.$$

Įvykių A ir B skirtumu ($A\setminus B$) vadinamas įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro įvykiui A palankios, bet įvykiui B nepalankios baigtys.

Taigi ieškodami įvykių A ir B skirtumo ($A \backslash B$), išrinkime baigtis, kurios palankios tik įvykiui A, ir nepalankios įvykiui B:

$$A \backslash B = \{31, 51\}.$$

Įvykių B ir A skirtumas reiškia baigtis, palankias įvykiui B, bet nepalankias įvykiui A:

$$B \backslash A = \{13, 15, 35\}.$$

Įvykį, kuriam palankios visos tos baigtys, kurios nepalankios įvykiui A, vadiname įvykiu, priešingu įvykiui A. Įvykio A priešingąjį žymime $\overline{A}$.

Surašykime įvykiams $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ palankias baigtis:

$$\overline{A} = \{13, 15, 35\}, \quad \overline{B} = \{31, 51\}.$$

Vadinasi,

$$A \backslash \overline{B} = \{53\}, \quad \overline{B} \backslash \overline{A} = \{31, 51\}.$$

Įvykių A ir B sankirta ($A \cap B$) vadinamas įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro abiems įvykiams palankios baigtys.

$$A \cap B = \{53\}.$$

Atsakymas. $A \backslash B = \{31, 51\}$, $B \backslash A = \{13, 15, 35\}$, $A \backslash \overline{B} = \{53\}$, $\overline{B} \backslash \overline{A} = \{31, 51\}$, $A \cap B = \{53\}$.

2a. Apskaičiuokite: A_9^3; C_{10}^7.

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ dauginamųjų}} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!, \qquad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (k > \tfrac{n}{2}).$$

Apskaičiuokime A_9^3.

I būdas.

$$A_9^3 = 9 \cdot (9-1) \cdot (9-2) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

II būdas.

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Apskaičiuokime C_{10}^7.

I būdas.

$$C_{10}^7 = \frac{10 \cdot (10-1) \cdot (10-2) \cdot (10-3) \cdot (10-4) \cdot (10-5) \cdot (10-6)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

II būdas.

$$C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120.$$

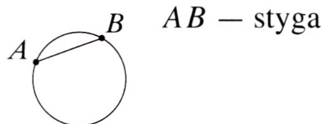
III būdas.

$$C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot (10-1) \cdot (10-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120.$$

Atsakymas. $A_9^3 = 504$, $C_{10}^7 = 120$.

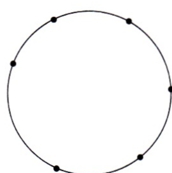
2b. Duoti 6 apskritimo taškai. Kiek galima nubrėžti skirtingų stygų, jungiančių du iš tų taškų?

Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus, vadinama styga.



I būdas.

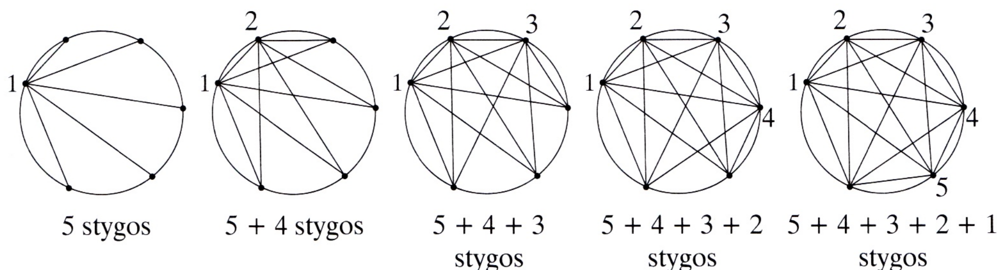
Nusibraižome apskritimą. Pažymime bet kuriuos 6 jo taškus.



Nubrėžiame visas stygas, kurių galai yra pažymėtieji taškai.

Brėžti ir skaičiuoti galima taip: pirmiausia pasirenkame vieną tašką ir nubrėžiame visas stygas, išeinančias iš pasirinkto taško; po to pasirenkame kitą tašką

ir nubrėžiame visas stygas, išeinančias iš šio taško, bet nesutampančias su jau nubrėžtomis, ir t. t.:



Iš viso yra

$$5+4+3+2+1=15 \text{ stygų}.$$

II būdas. Šį uždavinį galima suprasti ir taip. Reikia rasti, kiek elementų porų galima paimti iš 6 elementų. Tai reiškia, kad reikia rasti dviejų elementų iš šešių elementų derinių skaičių.

Deriniai — tai rinkiniai iš n elementų po k, kurie vienas nuo kito skiriasi tik pačiais elementais (tvarka nesvarbi). Jų skaičių žymime C_n^k.

$$C_6^2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15.$$

Atsakymas. 15.

2c. Kiek triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 2, 4, 6, 8?

I būdas. Surašykime visus tokius skaičius.

246, 248, 268, 264, 284, 286;
426, 428, 468, 462, 482, 486;
624, 628, 648, 642, 682, 684;
824, 826, 846, 842, 862, 864.

Iš viso tokių skaičių yra 24.
Čia svarbu buvo susikurti rašymo schemą.
Čia skaičiai buvo rašomi vadovaujantis tokiu algoritmu:

- pirmoje eilutėje surašyti visi skaičiai, kurie prasideda skaitmeniu 2, antroje — skaitmeniu 4, trečioje — skaitmeniu 6, ketvirtoje — skaitmeniu 8;

- pasirinkus pirmąjį skaitmenį (pavyzdžiui, 2) surašome visus skirtingus triženklius skaičius nekeisdami skaitmenų tvarkos:
  246, **2**48, **2**68;
- dar reikia pridėti skaičius, kuriuo gausime paskutinius du skaitmenis sukeitę vietomis:
  264, **2**84, **2**86.

Čia jau galima pastebėti, kad skaičių, kurie prasideda skaitmeniu 4, bus lygiai tiek pat, t. y. 6. Analogiškai prisidės 6 skaičiai, kurių pirmas skaitmuo yra 6, ir dar 6 skaičiai, kurių pirmas skaitmuo yra 8.

II būdas. Pirmuoju skaitmeniu gali būti bet kuris iš duotų 4 skaitmenų, antruoju — bet kuris iš likusių 3, trečiuoju — bet kuris iš likusių 2. Iš viso galima sudaryti

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

skaičius.

III būdas. Galima uždavinio sąlygą suprasti taip. Reikia nustatyti skaičių rinkinių, kurie gaunami iš 4 elementų imant po 3. Rinkiniai, kurie skiriasi tik elementų tvarka, irgi skirtingi (pvz. 246, 264). Vadinasi, mums reikia rasti gretinių iš 4 po 3 skaičių:

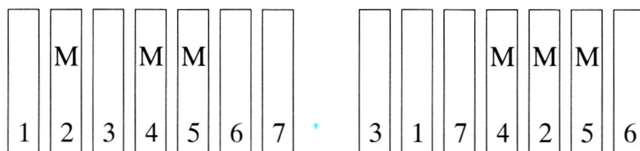
$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Atsakymas. 24.

3a. Į knygų lentyną atsitiktinai paimamos ir dedamos 4 istorijos ir 3 matematikos knygos. Kokia tikimybė, kad visos 3 matematikos knygos bus sudėtos greta?

> Jei iš viso bandymas turi n vienodai galimų baigčių, o su tuo bandymu susijusiam įvykiui A palankių baigčių yra m ($m \leqslant n$), tai įvykio A tikimybe vadiname skaičių $\frac{m}{n}$.
> Rašome: $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$.

Sprendimas. Mums reikia rasti, kiek iš viso yra galimybių sudėti $4 + 3 = 7$ knygas į lentyną, o tada rasti, kiek yra galimybių, kur 3 matematikos knygos bus greta. Galima pasidaryti uždavinį iliustruojančius brėžinukus:



Kairiajame paveikslėlyje matematikos knygos (M) nestovi greta, dešiniajame — stovi. Skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 — reiškia knygų pavadinimus.

Pirmiausia raskime, kiek yra skirtingų galimybių sudėti 7 knygas į lentyną. Tai tas pats, kas rasti, kiek yra skirtingų septynženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, kai skaitmenys nesikartoja.

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$$

Imkime 3 matematikos knygas greta. Raskime, kiek yra skirtingų galimybių pasirinkti šioms knygoms vietą:

M	M	M				
	M	M	M			
		M	M	M		
			M	M	M	
				M	M	M

Matome, kad iš viso yra 5 tokios galimybės.
Toliau imkime vieną kurią nors iš pavaizduotų galimybių, pavyzdžiui:

M	M	M				

tik dabar su matematikos knygų numeriais (pavadinimais):

M 2	M 4	M 5				
2	5	4				
4	2	5				
4	5	2				
5	2	4				
5	4	2				

Iš viso gavome 6 tokias galimybes. Jų skaičių galėjome rasti ir taip: į pirmą vietą galima statyti bet kurią iš 3 knygų, į antrą — bet kurią iš dviejų likusių, į trečią — paskutinę:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Dabar vėl imkime vieną iš ką tik pavaizduotų padėčių:

M	M	M				
2	4	5	1	3	6	7

ir kaitaliokime nematematines knygas:

			1	3	6	7

1 3 7 6   1 6 3 7   1 7 3 6

1 6 7 3   1 7 6 3   . . . .

Tokių atvejų bus tiek, kiek yra skirtingų keturženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, kai skaitmenys nesikartoja:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Iš viso skaičius galimybių, kai matematikos knygos atsiduria greta, lygus:

$$5 \cdot 6 \cdot 24.$$

Tikimybė, kad bus taip sudėta, lygi:

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 24}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{7}.$$

II būdas.

	M	M	M			
	1	2	3			

Suskaičiuokime, kiek yra galimybių, kai visos trys matematikos knygos atsiduria greta. Iš pradžių laikykime visas tris matematikos knygas viena, nes jos turi

būti greta. Vadinasi, reikia rasti, kiek yra skirtingų galimybių sudėti 5 knygas į lentyną. Tų atvejų iš viso yra

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Dabar kaitalioti 3 matematikos knygas galima

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

skirtingų būdų.
Vadinasi, iš viso atvejų, kai 3 matematikos knygos stovės greta, yra

$$5! \cdot 3!$$

Visas 7 knygas sustatyti į lentyną galima

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

skirtingų būdų.
Tikimybė, kad matematinės knygos bus greta, lygi

$$\frac{3! \cdot 5!}{7!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{7}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{7}$.

3b. Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe $\frac{1}{3}$. Jis šauna 3 kartus. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
C — šaulys nepataikė daugiau kaip du kartus;
D — šaulys pataikė 1 kartą.

Sprendimas. Sąlygoje pasakyta, kad tikimybė pataikyti į taikinį lygi $\frac{1}{3}$. Tai reiškia, kad tikimybė, jog taiklus bus:

- 1-asis šūvis, lygi $\frac{1}{3}$;
- 2-asis šūvis, lygi $\frac{1}{3}$;
- 3-asis šūvis, lygi $\frac{1}{3}$.

Suprantama, kad kiekvieno šūvio tikimybė nepriklauso nuo to, kokie buvo kiti šūviai, taiklūs ar netaiklūs.
Pažymėkime įvykius:

A_1 — pirmasis šūvis taiklus,
A_2 — antrasis šūvis taiklus,
A_3 — trečiasis šūvis taiklus.

Jų tikimybės:

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Įvykiai A_1, A_2, A_3 yra nepriklausomi.

> Jei įvykiai A_1, A_2, A_3, ... yra nepriklausomi, tai tikimybę, kad įvyks ir A_1, ir A_2, ir A_3, ... galima apskaičiuoti sudauginus įvykių A_1, A_2, A_3, ... tikimybes:
> $\mathbf{P}(\text{ir } A_1, \text{ir } A_2, \text{ir } A_3, \ldots) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) \cdot \ldots$
> Galima rašyti ir taip:
> $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) \cdot \ldots$
> $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Apskaičiuokime tikimybę, kad šaulys nepataikė visus tris kartus (daugiau kaip du kartus).
Tikimybė, kad šaulys nepataikė pirmu šūviu, lygi $\mathbf{P}(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, kad nepataikė antru šūviu — $\frac{2}{3}$, kad nepataikė trečiu šūviu — $\frac{2}{3}$.
Vadinasi,

$$\mathbf{P}(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

Apskaičiuokime tikimybę, kad lygiai vienas šūvis iš trijų buvo taiklus.
Pirmiausia apskaičiuokime tikimybę įvykio, kad tik pirmas šūvis buvo taiklus:

$$\mathbf{P}(\text{tik } A_1) = \mathbf{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

Tikimybė, kad tik antras šūvis buvo taiklus:

$$\mathbf{P}(\text{tik } A_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

Tikimybė, kad tik trečias šūvis buvo taiklus:

$$\mathbf{P}(\text{tik } A_3) = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

Tikimybę, kad arba pirmasis šūvis taiklus, arba antrasis šūvis taiklus, arba trečiasis šūvis taiklus, rasime sudėję tris gautąsias tikimybes:

$$\mathbf{P}(\text{arba tik } A_1, \text{arba tik } A_2, \text{arba tik } A_3) =$$
$$= \mathbf{P}(\text{tik } A_1) + \mathbf{P}(\text{tik } A_2) + \mathbf{P}(\text{tik } A_3) =$$
$$= \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}.$$

Atsakymas. $\mathbf{P}(C) = \frac{8}{27}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{4}{9}$.

3c. Knygoje yra 300 puslapių. Kokia tikimybė, kad asitiktinai atversto puslapio numeris yra arba skaičiaus 20, arba skaičiaus 25 kartotinis?

I būdas. Surašykime puslapių numerius, kurie yra skaičiaus 20 kartotiniai:
20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300.
Surašykime puslapių numerius, kurie yra skaičiaus 25 kartotiniai:
25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300.
Surašykime puslapių numerius, kurie yra arba skaičiaus 20 arba skaičiaus 25 kartotiniai:
20, 25, 40, 50, 60, 75, 80, 100, 120, 125, 140, 150, 160, 175, 180, 200, 220, 225, 240, 250, 260, 275, 280, 300.
Suskaičiuojame — iš viso tokių numerių yra 24.
Tikimybė atversti tą numerį

$$\mathbf{P} = \frac{24}{300} = \frac{2}{25}.$$

II būdas.

1) Suskaičiuokime, kiek yra natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 300, kurie dalijasi iš 20:

$$300 : 20 = 15.$$

2) Suskaičiuokime, kiek yra natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 300, kurie dalijasi iš 25:

$$300 : 25 = 12.$$

3) Nustatėme, kad iš 20 dalijasi 15 skaičių, o iš 25 dalijasi 12 skaičių. Bet kai kurie iš tų skaičių kartojasi, t. y. dalijasi ir iš 20, ir iš 25. Raskime, kiek yra natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 300, kurie dalijasi ir iš 20, ir iš 25. Pats mažiausias toks skaičius yra 100. Šį skaičių galima rasti ieškant skaičių 20 ir 25 mažiausiojo bendrojo kartotinio (MBK(20, 25) = 100).
Kiti skaičiai, kurie dalijasi ir iš 20, ir iš 25 yra 100 kartotiniai: 200, 300, ... Vadinasi, nuo 1 iki 300 iš viso yra 3 skaičiai, kurie dalijasi ir iš 20, ir iš 25. Vadinasi, arba iš 20, arba iš 25 (arba iš abiejų) dalijasi

$$15 + 12 - 3 = 24 \text{ skaičiai.}$$

$\mathbf{P} = \frac{24}{300} = \frac{2}{25}$.

Atsakymas. $\frac{2}{25}$.

4a. Atskirose kortelėse surašytos raidės A, R, V, C, O, K, M, S, E, F. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai imdami penkias korteles ir dėdami jas į eilę, gausime žodį VORAS.

Sprendimas. Parinkti 5 raides iš 10 (kai svarbi raidžių tvarka) iš viso yra skirtingų galimybių

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240 \quad (= A_{10}^5).$$

Tarp tų rinkinių yra tik vienas rinkinys, kai gauname žodį

V O R A S.

Vadinasi, ieškomoji tikimybė:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{30\,240}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{30\,240}$.

4b. Ant stalo išdėliotos 9 kortelės, sunumeruotos nuo 1 iki 9. Jos apverstos ir sumaišytos. Atsitiktinai atverstos 3 kortelės. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — visų trijų atverstų kortelių numeriai yra lyginiai;
B — visų trijų atverstų kortelių numeriai yra didesni už 4;
C — tarp atverstųjų kortelių yra kortelė su numeriu 5.

Sprendimas. Pastebėkime, kad čia kortelių atvertimo tvarka yra *nesvarbi*.
Jei būtų tvarka svarbi (kaip **4a** uždavinyje), tai paimti 3 korteles iš 9 galėtume:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \quad \text{skirtingais būdais.}$$

Kadangi tvarka nesvarbi, tai sandaugą $9 \cdot 8 \cdot 7$ dar reikia padalyti iš skaičiaus, kuris reiškia 3 elementų perstatymų galimybes:

$$3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Vadinasi, paimti 3 korteles iš 9 (kai tvarka nesvarbi) galima

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ skirtingais būdais} \quad (= C_9^3).$$

Raskime, kiek tarp tų 84 variantų yra atvejų, kai visų trijų kortelių numeriai yra lyginiai skaičiai.

Surašykime numerius: 1, $\boxed{2}$, 3, $\boxed{4}$, 5, $\boxed{6}$, 7, $\boxed{8}$, 9.

Surašykime visus lyginių numerių trejetus (tvarka nesvarbi):

246, 248, 264, 468.

Iš viso yra 4 tokie rinkiniai. Jų skaičių galėjome rasti ir remdamiesi formule:

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.$$

Ieškomoji tikimybė

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}.$$

Apskaičiuokime tikimybę įvykio B, — kad visų trijų atverstų kortelių numeriai yra didesni už 4.
Surašykime kortelių trejetus, kurių numeriai didesni už 4:

567, 568, 569, 578, 579, 589,
678, 679, 689,
789.

Iš viso tokių trejetų yra 10 ($= C_5^3$). Ieškomoji tikimybė

$$\mathbf{P}(B) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}.$$

Apskaičiuokime tikimybę įvykio C, — kad tarp atverstųjų kortelių yra kortelė su numeriu 5.
Viena kortelė bus būtinai su 5 numeriu, o kitos — bet kurios dvi iš likusių. Tokių trejetų iš viso yra

$$1 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \quad (= 1 \cdot C_8^2).$$

Ieškomoji tikimybė

$$\mathbf{P}(C) = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}.$$

Pastaba. Kad ši tikimybė lygi $\frac{1}{3}$, galima „pajusti“ iš karto. Suskirsčius 9 korteles po 3, vienoje iš 3 krūvelių bus kortelė su numeriu 5. Tikimybė, kad pasirinksime tą krūvelę, lygi $\frac{1}{3}$.

Atsakymas. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{21}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{42}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$.

4c. Klasės mokiniai Naujųjų metų proga sveikindami savo bendraklasius, kiekvienas kiekvienam išsiuntė po atviruką. Buvo išsiųsti 756 atvirukai. Kiek mokinių yra klasėje?

Sprendimas. Klasės mokinių skaičių pažymėkime n. Kiekvienas mokinys išsiuntė po $(n-1)$ atviruką. Iš viso buvo išsiųsta:

$$n \cdot (n-1) = 756$$

atvirukai.
Sprendžiame lygtį:

$$n \cdot (n-1) = 756,$$
$$n^2 - n - 756 = 0,$$
$$D = 3025 = 55^2,$$
$$n_1 = 28, \quad n_2 = -27 \text{ (netinka)}.$$

Atsakymas. 28.

5. Kambaryje yra 4 futbolo ir 8 tinklinio kamuoliai. Jonas nežiūrėdamas paima 6 kamuolius. Kokia tikimybė, kad Jonas paėmė ne daugiau kaip 2 futbolo kamuolius?

Sprendimas. Kad bus išimti ne daugiau kaip du futbolo kamuoliai, reiškia, kad gali būti išimti 2 futbolo kamuoliai, 1 futbolo kamuolys arba nė vieno futbolo kamuolio.
Iš sąlygos aišku, kad dėžėje yra $4 + 8 = 12$ kamuolių.
1) Paimti 6 kamuolius galima

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924 (= C_{12}^6) \quad \text{būdais.}$$

(Čia kamuolių paėmimo tvarka nesvarbi!)
2) Suskaičiuokime, kiek tarp šių 924 atvejų bus tokių, kad:
A — bus išimti 2 futbolo ir 4 tinklinio kamuoliai,
B — bus išimtas 1 futbolo ir 5 tinklinio kamuoliai,
C — bus išimti 6 tinklinio kamuoliai.
(A) Paimti 2 futbolo kamuolius iš 4 galima

$$\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 (= C_4^2) \quad \text{būdais.}$$

Paimti 4 tinklinio kamuolius iš 8 galima

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 (= C_8^4) \quad \text{būdais.}$$

Paimti 2 futbolo ir 4 tinklinio kamuolius galima

$$6 \cdot 70 = 420 (= C_4^2 \cdot C_8^4) \quad \text{būdų}.$$

(B) Paimti 1 futbolo kamuolį iš 4 galima

$$4 (= C_4^1) \quad \text{būdais}.$$

Paimti 5 tinklinio kamuolius iš 8 galima

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 (= C_8^5) \quad \text{būdais}.$$

Paimti 1 futbolo ir 5 tinklinio kamuolius galima

$$4 \cdot 56 = 224 (= C_4^1 \cdot C_8^5) \quad \text{būdais}.$$

(C) Paimti 6 tinklinio kamuolius iš 8 galima

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 28 (= C_8^6 = C_8^2) \quad \text{būdais}.$$

Iš viso A, B ir C atvejų yra

$$420 + 224 + 28 = 672.$$

3) Vadinasi, tikimybė, kad Jonas išėmė ne daugiau kaip 2 futbolo kamuolius, lygi

$$\frac{672}{924} = \frac{8}{11}.$$

Pastaba. Trumpai sprendimą galima užrašyti taip:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) = \frac{C_4^2 \cdot C_8^4}{C_{12}^6} + \frac{C_4^1 \cdot C_8^5}{C_{12}^6} + \frac{C_8^6}{C_{12}^6} =$$
$$= \frac{5}{11} + \frac{8}{33} + \frac{1}{33} = \frac{8}{11}.$$

Atsakymas. $\frac{8}{11}$.

Trikampiai ir tiesės

K18 (24)

1. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 3 cm, o vieno statinio ilgis yra 10 cm. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

2. Trikampio dviejų kraštinių ilgiai atitinkamai yra 16 ir 10, o smailiojo kampo tarp jų sinusas lygus 0,6. Apskaičiuokite trikampio perimetrą ir plotą.

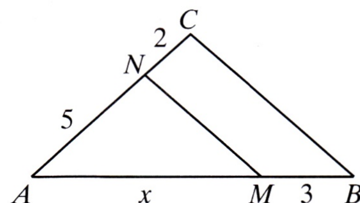
3. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei jo vienos kraštinės ilgis yra 2 cm, o kampų prie šios kraštinės didumai yra 75° ir 45°.

4. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis yra 16 cm, o šoninės kraštinės ilgis — 10 cm. Apskaičiuokite šio trikampio įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgių sumą.

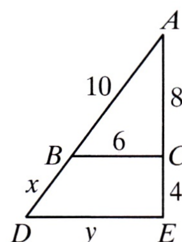
5. Stačiojo trikampio plotas lygus 60, o įžambinė — 17. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

6. Stulpas AB statmenai įkastas į žemę ir į priešingas puses pritvirtintas prie jos dviem lynais BC ir BD, su žeme sudarančiais 60° ir 30° kampus. Taškai A, C ir D yra vienoje tiesėje, $CD = 20$ m.
   a) Raskite stulpo aukštį.
   b) Raskite lynų ilgius.
   c) Ar užteks 27 metrų lyno dar vienam tokiam stulpui įtvirtinti?

7. a) Apskaičiuokite x, jei $MN \parallel BC$.



   b) Raskite x ir y, jei $BC \parallel DE$.



8. Trikampio ABC pusiaukraštinės AM ir BN yra statmenos. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai $AM = m$ ir $BN = n$.

9. Lygiakraščio trikampio plotas lygus $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite šio trikampio kraštinių ir aukštinių ilgius.

1. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija vieną statinį į dalis, kurių ilgiai yra 2 cm ir 10 cm. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

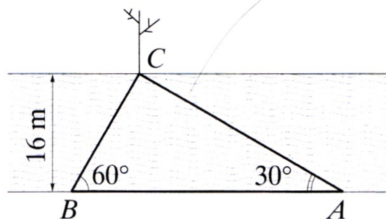
2. Trikampio dviejų kraštinių ilgiai atitinkamai yra 14 ir 15, o smailiojo kampo tarp jų sinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite šio trikampio perimetrą ir plotą.

3. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei jo vienos kraštinės ilgis yra 4 cm, o kampų prie šios kraštinės didumai yra 30° ir 105°.

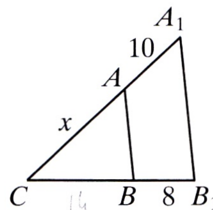
4. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis yra 12 cm, o šoninės kraštinės ilgis — 10 cm. Apskaičiuokite šio trikampio apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų spindulių ilgių skirtumą.

5. Stačiojo trikampio perimetras lygus 80, o įžambinė — 34. Apskaičiuokite trikampio plotą.

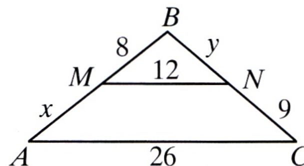
6. Upės plotis yra 16 m. Kokiu atstumu Benas ir Andrius turi atsistoti tame pačiame krante vienas nuo kito, kad Benas kitame krante esantį medį matytų 60° kampu, o Andrius tą patį medį matytų 30° kampu?



7. a) Raskite x, jei $AB \parallel A_1B_1$, $CB_1 = 22$, $AA_1 = 10$, $BB_1 = 8$.



b) Raskite x ir y, jei $AC \parallel MN$.



8. Trikampio pusiaukraštinės yra 12 cm, 15 cm ir 21 cm ilgio. Apskaičiuokite trikampio plotą.

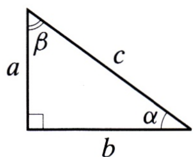
9. Lygiakraščio trikampio plotas lygus $100\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite trikampio kraštinių ir aukštinių ilgius.

Trikampiai ir tiesės

K18 (24)

1. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 3 cm, o vieno statinio ilgis yra 10 cm. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

Trikampis, kurio vienas kampas yra status ($= 90^\circ$), vadinamas stačiuoju.



$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \alpha + \beta = 90^\circ;$$

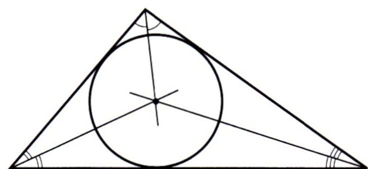
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};$$

$$a = c\sin\alpha, \quad a = c\cos\beta, \quad a = b\operatorname{tg}\alpha, \quad a = b\operatorname{ctg}\beta;$$

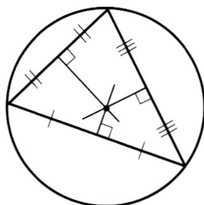
$$b = c\sin\beta, \quad b = c\cos\alpha, \quad b = a\operatorname{tg}\beta, \quad b = a\operatorname{ctg}\alpha.$$

Apskritimas, kuris liečia visas trikampio kraštines, vadinamas įbrėžtu į trikampį apskritimu (įbrėžtiniu).

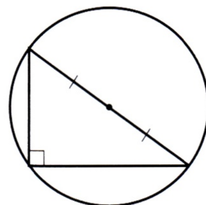
Apskritimas, kuris eina per visas trikampio viršūnes vadinamas apibrėžtiniu apskritimu.



Įbrėžtinio apskritimo centras yra pusiaukampinių susikirtimo taškas



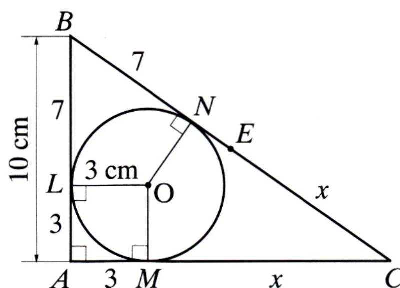
Apibrėžtinio apskritimo centras yra kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas



Stačiojo trikampio apibrėžtinio apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas

Duota: $\triangle ABC$ — status, $AB = 10$ cm, $r = 3$ cm (įbrėžto apskritimo spindulys).

Rasti: R (apibrėžto apskritimo spindulio ilgį).



Sprendimas. Reikia rasti $BE = EC = R$, t. y. $R = \frac{BC}{2}$.
Raskime BC ilgį.

1) $r = ON = OL = OM = 3$ cm, $ON \perp BC$, $OL \perp AB$, $OM \perp AC$.
Keturkampis $ALOM$ yra kvadratas, todėl $AL = 3$ cm, $AM = 3$ cm.

2) Randame BL: $BL = 10 - 3 = 7$ (cm).
$BN = BL = 7$ cm (liestinių atkarpos yra lygios).

3) Atkarpą CM pažymėkime x.
$CM = CN = x$ (liestinių atkarpos yra lygios).

4) Trikampiui ABC taikome Pitagoro teoremą:

$$AB = 10\,\text{cm}, \quad AC = (3 + x)\,\text{cm}, \quad BC = (7 + x)\,\text{cm},$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$
$$(7 + x)^2 = 10^2 + (3 + x)^2,$$
$$49 + 14x + x^2 - 100 - 9 - 6x - x^2 = 0,$$
$$8x = 60,$$
$$x = 7{,}5\,(\text{cm}).$$

Vadinasi,

$$BC = 7 + 7{,}5 = 14{,}5\,(\text{cm}).$$

5) Stačiojo trikampio apibrėžtinio apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas. Vadinasi,

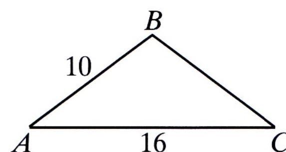
$$R = \frac{BC}{2} = \frac{14{,}5}{2} = 7{,}25\,(\text{cm}).$$

Atsakymas. 7,25 cm.

2. Trikampio dviejų kraštinių ilgiai atitinkamai yra 16 ir 10, o smailiojo kampo tarp jų sinusas lygus 0,6. Apskaičiuokite trikampio perimetrą ir plotą.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$
$$S_\triangle = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma;$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Duota: $AB = 10$, $AC = 16$, $\sin A = 0{,}6$.
Rasti: $P_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ABC}$.
Sprendimas.



1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A =$
$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot 0{,}6 = 48.$

2) Raskime BC ilgį. Remsimės kosinusų teorema:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A.$$

Šios lygybės dešinėje pusėje nežinoma tik $\cos A$ reikšmė.
Šią reikšmę rasti galime, nes žinome $\sin A$ reikšmę.
Remsimės lygybe $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. Iš jos randame:

$$0{,}36 + \cos^2 A = 1, \quad \cos^2 A = 0{,}64.$$

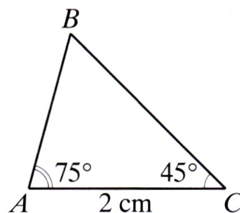
Kadangi kampas A smailusis, tai $\cos A = 0{,}8$. Vadinasi,

$$BC^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 0{,}8, \quad BC^2 = 100, \quad BC = 10.$$

3) $P_{\triangle ABC} = 10 + 16 + 10 = 36$.

Atsakymas. $P = 36$, $S = 48$.

3. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei jo vienos kraštinės ilgis yra 2 cm, o kampų prie šios kraštinės didumai yra 75° ir 45°.



Duota: $AC = 2$ cm, $\angle A = 75°$, $\angle C = 45°$.
Rasti: $S_{\triangle ABC}$.
Sprendimas.
1) $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 75° - 45° = 60°$.
2) Raskime AB ilgį. Remkimės sinusų teorema:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}, \quad AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}, \quad AB = \frac{2 \cdot \sin 45°}{\sin 60°},$$

$$AB = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} \text{ (cm)}.$$

3) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot 2 \cdot \sin 75° =$
$= \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sin 75°$ (cm^2).

4) $\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

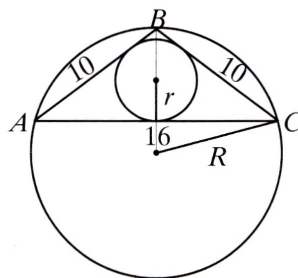
5) $S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sin 75° = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{2(\sqrt{12} + 6)}{3 \cdot 4} =$
$= \frac{2(2\sqrt{3} + 6)}{3 \cdot 4} = \frac{4(\sqrt{3} + 3)}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3}$ (cm^2).

Atsakymas. $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$ cm^2.

4. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis yra 16 cm, o šoninės kraštinės ilgis — 10 cm. Apskaičiuokite šio trikampio įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgių sumą.

> Kai žinomi trikampio kraštinių ilgiai a, b, c, tai įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgius (r ir R) galima apskaičiuoti remiantis formulėmis:
> $r = \frac{S}{p}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — trikampio plotas,
> $p = \frac{a+b+c}{2}$ — pusperimetris;
> $R = \frac{abc}{4S}$.

Duota: $\triangle ABC$, $AB = BC = 10\,\text{cm}$,
$AC = 16\,\text{cm}$.
Rasti: $r + R$.



Sprendimas.
1) $r = \frac{S}{p}$, $p = \frac{16+10+10}{2} = 18$ (cm);

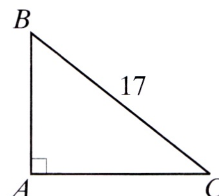
$$S = \sqrt{18 \cdot (18-10) \cdot (18-10) \cdot (18-16)} =$$
$$= \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = 8 \cdot \sqrt{36} = 8 \cdot 6 = 48(\text{cm}^2);$$
$$r = \frac{48}{18} = \frac{8}{3}\ (\text{cm}).$$

2) $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 16}{4 \cdot 48} = \frac{25}{3}$ (cm).
3) $r + R = \frac{8}{3} + \frac{25}{3} = \frac{33}{3} = 11$ (cm).

Atsakymas. 11 cm.

5. Stačiojo trikampio plotas lygus 60, o įžambinė — 17. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

Duota: $\triangle ABC$ — status ($\angle A = 90°$),
$S_{\triangle} = 60$, $BC = 17$.
Rasti: $P_{\triangle ABC}$.
Sprendimas. Trikampio statinių ilgiai su įžambinės ilgiu susiję lygybe:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{— Pitagoro teorema,}$$
$$AB^2 + AC^2 = 17^2.$$

Stačiojo trikampio plotas lygus statinių ilgių sandaugos pusei:

$$\frac{AB \cdot AC}{2} = S_{\triangle},$$
$$\frac{AB \cdot AC}{2} = 60,$$
$$AB \cdot AC = 120.$$

Turime dvi lygtis su dviem nežinomaisiais. Nežinomųjų reikšmes (statinių ilgius) rasime išsprendę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 = 289, \\ AB \cdot AC = 120. \end{cases}$$

Iš antros lygties išsireikškime vieną nežinomąjį ir gautąją išraišką įstatykime į kitą lygtį:

$$AB \cdot AC = 120, \quad AB = \frac{120}{AC}, \quad \frac{120^2}{AC^2} + AC^2 = 289.$$

Pažymėkime $AC^2 = x$. Turime:

$$\frac{14\,400}{x} + x = 289 | \cdot x,$$
$$14\,400 + x^2 = 289x,$$
$$x^2 - 289x + 14\,400 = 0,$$
$$D = 289^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14\,400 = 83\,521 - 57\,600 = 25\,921 = 161^2,$$
$$x_1 = \frac{289 - 161}{2} = 64, \quad x_2 = \frac{289 + 161}{2} = 225.$$

Grįžtame prie AC:

$$AC^2 = 64, \quad AC = 8.$$
$$AC^2 = 225, \quad AC = 15.$$

Remdamiesi lygybe $AB = \frac{120}{AC}$, randame AB:
kai $AC = 8$, tai $AB = \frac{120}{8} = 15$; kai $AC = 15$, tai $AB = \frac{120}{15} = 8$.
Vadinasi, trikampio statinių ilgiai yra 8 ir 15, o perimetras

$$P_{\triangle ABC} = 17 + 15 + 8 = 40.$$

Pastaba. Padauginę sistemos antrą lygtį iš dviejų ir sudėję su pirma, gauname $(AB + AC)^2 = 529$, $AB + AC = 23$. Vadinasi, perimetras lygus 40.

Atsakymas. 40.

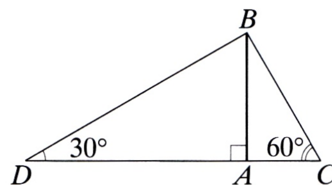
6. Stulpas AB statmenai įkastas į žemę ir į priešingas puses pritvirtintas prie jos dviem lynais BC ir BD, su žeme sudarančiais 60° ir 30° kampus. Taškai A, C ir D yra vienoje tiesėje, $CD = 20\,\text{m}$.

a) Raskite stulpo aukštį.

b) Raskite lynų ilgius.

c) Ar užteks 27 metrų lyno dar vienam tokiam stulpui įtvirtinti?

Duota: $\angle BDA = 30^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$,
$DC = 20\,\text{m}$.
Rasti: a) AB; b) BC, BD;
c) ar $BC + BD \leqslant 27$?



Sprendimas.
$\triangle DBC$ — status, $\angle D = 30^\circ$, todėl
$BC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10\,(\text{m})$.
$AB = BC \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,(\text{m})$.
$BD = DC \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,(\text{m})$.

c) $BC + BD = 10 + 10\sqrt{3}$. Reikia nustatyti, ar $10 + 10\sqrt{3} \leqslant 27$, t. y. ar $10\sqrt{3} \leqslant 17$, $300 \leqslant 289$. Vadinasi,

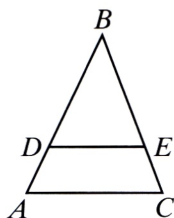
$$BC + BD > 27.$$

Todėl 27 m lyno stulpo įtvirtinimui neužteks.

Atsakymas. a) $5\sqrt{3}\,\text{m}$; b) $10\,\text{m}$, $10\sqrt{3}\,\text{m}$; c) ne.

7.

Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei, atkerta trikampį, panašų į duotąjį.

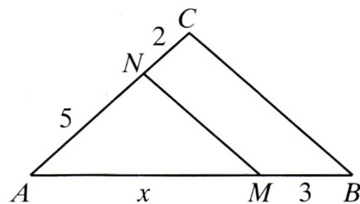


Jei $DE \parallel AC$,
tai $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$.

O tai reiškia, kad tų trikampių atitinkami kampai yra lygūs:
$\angle BAC = \angle BDE$, $\angle BCA = \angle BED$, $\angle ABC = \angle DBE$;
o kraštinių ilgiai — proporcingi: $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB}$.
Taip pat teisinga tokia lygybė: $\frac{CE}{EB} = \frac{AD}{DB}$.

7a. Apskaičiuokite x, jei $MN \parallel BC$.
Sprendimas.

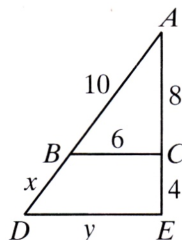
$$\frac{5}{x} = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{5 \cdot 3}{2}, \quad x = 7{,}5.$$



Atsakymas. 7,5

7b. Raskite x ir y, jei $BC \parallel DE$.
Sprendimas.

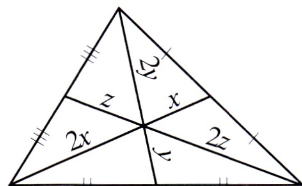
$$\frac{4}{x} = \frac{8}{10}, \quad x = \frac{4 \cdot 10}{8}, \quad x = 5;$$
$$\frac{y}{6} = \frac{AE}{AC}, \quad \frac{y}{6} = \frac{12}{8}, \quad y = \frac{12 \cdot 6}{8}, \quad y = 9.$$



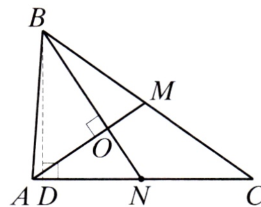
Atsakymas. $x = 5$, $y = 9$.

8. Trikampio ABC pusiaukraštinės AM ir BN yra statmenos. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai $AM = m$ ir $BN = n$.

Trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške ir tas taškas kiekvieną pusiaukraštinę dalija santykiu 2:1, skaičiuojant nuo trikampio viršūnių.



Duota: $BM = MC$, $AN = NC$, $BN \perp AM$,
$AM = m$, $BN = n$.
Rasti: $S_{\triangle ABC}$.
Sprendimas.



1) Pastebėkime, kad $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle BNC}$, nes $AN = NC$, o aukštinė BD yra bendra:

$$S_{\triangle ABN} = \frac{AN \cdot BD}{2}, \quad S_{\triangle NBC} = \frac{NC \cdot BD}{2}, \quad S_{\triangle ABN} = S_{\triangle BNC}.$$

2) Apskaičiuokime trikampio ABN plotą.
AO yra aukštinė į kraštinę BN. Raskime AO ilgį:

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3}m.$$

Trikampio ABN plotas:

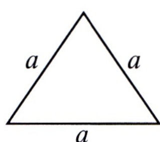
$$S_{\triangle ABN} = \frac{AO \cdot BN}{2} = \frac{\frac{2}{3}m \cdot n}{2} = \frac{1}{3}mn.$$

3) $S_{\triangle ABC} = 2 \cdot S_{\triangle ABN} = 2 \cdot \frac{1}{3}mn = \frac{2}{3}mn.$

Atsakymas. $\frac{2}{3}mn.$

9. Lygiakraščio trikampio plotas lygus $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite šio trikampio kraštinių ir aukštinių ilgius.

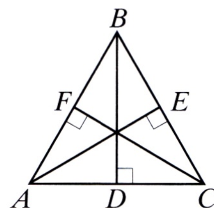
Trikampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas lygiakraščiu.



Lygiakraščio trikampio plotą galima apskaičiuoti remiantis formule: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$.

Lygiakraščio trikampio visi kampai lygūs 60°. Lygios ir visos pusiaukampinės, pusiaukraštinės, aukštinės.
Lygiakraščio trikampio aukštinės yra kartu ir pusiaukampinės, ir pusiaukraštinės.

Duota: $AB = BC = CA$,
$S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.
Rasti: AB, BC, CA;
AE, BD, CF.



Sprendimas.
1) Trikampio kraštinės ilgį rasime remdamiesi lygiakraščio trikampio ploto formule:
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AC^2 = 9\sqrt{3},$$
$$AC^2 = 36,$$
$$AC = 6\,(\text{cm}).$$

2) Aukštinės ilgį rasime remdamiesi tuo, jog trikampio plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgių sandaugos pusei:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD, \quad \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot BD = 9\sqrt{3}, \quad BD = 3\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

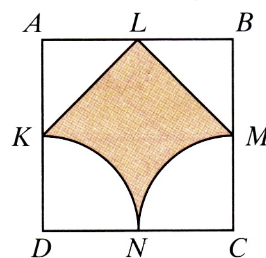
Pastaba. $BD = AB \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,(\text{cm})$.

Atsakymas. $AB = BC = CA = 6\,\text{cm}$, $AE = BD = CF = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$.

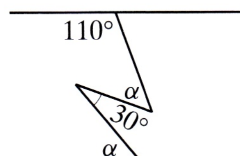
Daugiakampiai. Apskritimas ir skritulys

K19 (25–26)

1. $ABCD$ — kvadratas, $AB = a$, $AL = LB$. KN ir MN — lankai apskritimų, kurių centrai atitinkamai yra D ir C, o spindulys AL. Apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą.



2. Tarp dviejų lygiagrečių tiesių nubrėžta laužtė, kurios kampų didumai parodyti brėžinyje. Apskaičiuokite α.



3. Apie apskritimą apibrėžtos lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai yra 36 cm ir 100 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.

4. Lygiagretainio įstrižainių ilgiai yra 12 ir 14, o jo kraštinių ilgių skirtumas lygus 4. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

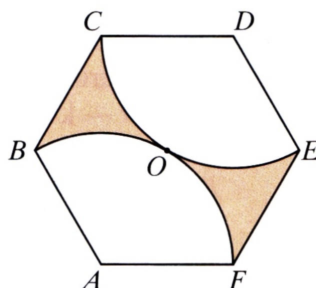
5. Tetraedro $ABCD$ visos briaunos lygios 2. Taškai S ir R yra atitinkamai briaunų AC ir BD vidurio taškai.
1) Įrodykite, kad $RS \perp BD$.
2) Apskaičiuokite atkarpos RS ilgį.

6. Lygiašonės trapecijos šoninių kraštinių tęsiniai susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos ilgesnįjį pagrindą, jei jos trumpesniojo pagrindo ilgis yra 4, o aukštinė lygi 2.

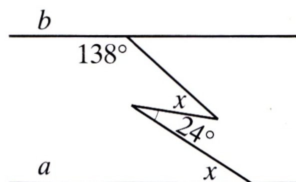
7. Kvadrato plotas padidėjo 21%. Keliais procentais padidėjo jo kraštinės ilgis?

8. Taisyklingojo šešiakampio kraštinės ilgis yra $2\sqrt{3}$ cm. Apie šį šešiakampį apibrėžtas ir į jį įbrėžtas apskritimai. Apskaičiuokite:
a) šešiakampio plotą;
b) įbrėžto apskritimo spindulio ilgį;
c) apibrėžto apie šešiakampį apskritimo spindulio ilgį.

1. $ABCDEF$ — taisyklingasis šešiakampis, kurio centras O, $AB = a$. BF ir CE — lankai apskritimų, kurių centrai atitinkamai yra A ir D, liečiasi taške O. Apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą.



2. Raskite kampo x didumą, jei $a \parallel b$.



3. Apie 4 cm spindulio apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios perimetras lygus 68 cm. Apskaičiuokite ilgesniojo trapecijos pagrindo ilgį.

4. Lygiagretainio įstrižainių ilgiai yra 24 ir 28, o jo kraštinių ilgių skirtumas lygus 8. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

5. Trapecijos $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O. Atkarpų OA, OB, OC ir OD vidurio taškai paeiliui sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad gauto keturkampio plotas lygus ketvirtadaliui trapecijos ploto.

6. Trapecijos pagrindų ilgiai yra 6 cm ir 9 cm. Trapecijos šoninės kraštinės, kurių ilgiai yra 4 cm ir 5 cm, pratęstos kol susikirs. Raskite atstumus nuo susikirtimo taško iki trumpesniojo pagrindo galų.

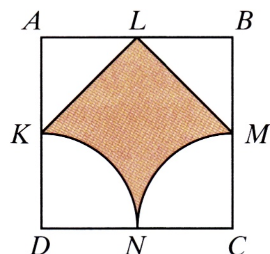
7. Keliais procentais reikia sumažinti kvadrato įstrižainę, kad jo plotas sumažėtų 51%?

8. Taisyklingojo šešiakampio plotas lygus $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite:
a) šešiakampio kraštinės ilgį;
b) atstumą nuo šešiakampio centro iki jo kraštinės.

Daugiakampiai. Apskritimas ir skritulys

K19 (25–26)

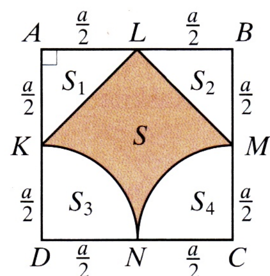
1. $ABCD$ — kvadratas, $AB = a$, $AL = LB$. KN ir MN — lankai apskritimų, kurių centrai atitinkamai yra D ir C, o spindulys AL. Apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą.



Duota: $ABCD$ — kvadratas,
$AB = a$, $AL = LB = \frac{a}{2}$,
$DK = DN = CN = CM = \frac{a}{2}$.

Rasti: S.

Sprendimas.



$S = S_{\text{kvadrato}} - S_1 - S_2 - S_3 - S_4$, $\quad S_{\text{kvadrato}} = a^2$.

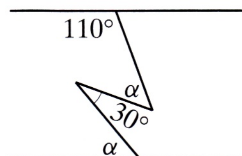
1) $S_1 = S_2$, $\quad S_1 + S_2 = \frac{1}{4}\, S_{\text{kvadrato}} = \frac{1}{4} \cdot a^2$.

2) $S_3 = S_4$, $\quad S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{\text{skritulio}}$,
$S_{\text{skritulio}} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot a^2$,
$S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot a^2 = \frac{\pi}{8} \cdot a^2$.

3) $S = a^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{8a^2 - 2a^2 - \pi a^2}{8} = \frac{6a^2 - \pi a^2}{8} = \frac{(6-\pi)a^2}{8}$.

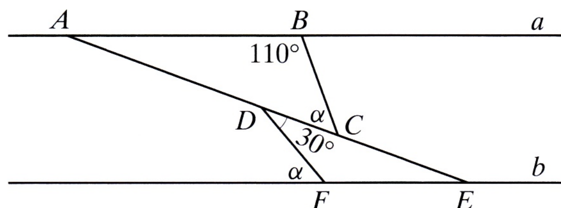
Atsakymas. $\frac{6-\pi}{8} \cdot a^2$.

2. Tarp dviejų lygiagrečių tiesių nubrėžta laužtė, kurios kampų didumai parodyti brėžinyje. Apskaičiuokite α.



8 7 a 5 6 4 3 b 1 2	Jei $a \parallel b$, tai $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$ — atitinkamieji kampai, $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$ — vidaus priešiniai kampai.

Papildykime brėžinį, pratęsdami viduriniąją laužtės grandį iki tiesių.

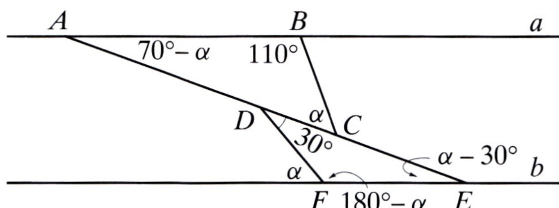


1) Imkime trikampį ABC:
$\angle A = 180° - 110° - \alpha = 70° - \alpha$.

2) Imkime trikampį DEF:

$$\angle F = 180^\circ - \alpha,$$
$$\angle E = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - 30^\circ = 180^\circ - 180^\circ + \alpha - 30^\circ = \alpha - 30^\circ.$$

Turime:



3) Kadangi $a \parallel b$, tai $\angle E = \angle A$ (vidaus priešiniai kampai yra lygūs),

$$\alpha - 30^\circ = 70^\circ - \alpha,$$
$$2\alpha = 100^\circ,$$
$$\alpha = 50^\circ.$$

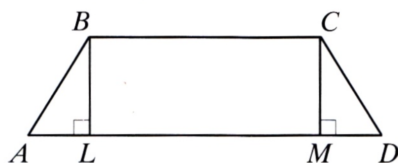
Atsakymas. 50°.

3. Apie apskritimą apibrėžtos lygiašonės trapecijos pagrindų ilgiai yra 36 cm ir 100 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.

Trapecija — tai keturkampis, kurio dvi kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi — nelygiagrečios.

Nelygiagrečios kraštinės vadinamos šoninėmis kraštinėmis, lygiagrečios — pagrindais.

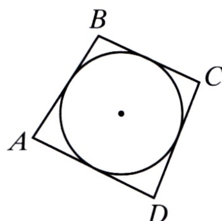
Jei trapecijos šoninės kraštinės yra lygios, tai trapecija vadinama lygiašone.



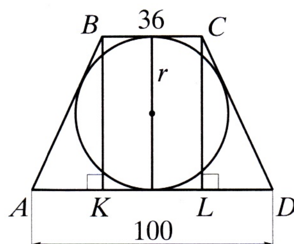
$AD \parallel BC$,
$AB = CD$,
$ABCD$ — lygiašonė trapecija,
$AL = MD$.

Apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių sumos yra lygios:

$$AB + CD = BC + AD.$$



Duota: $ABCD$ — trapecija, $AB = CD$,
$BC = 36\,\text{cm}$, $AD = 100\,\text{cm}$.
Rasti: r.
Sprendimas. Pastebėkime, kad $r = \frac{BK}{2}$.
Reikia rasti BK ilgį. Jį rasime iš stačiojo $\triangle ABK$.

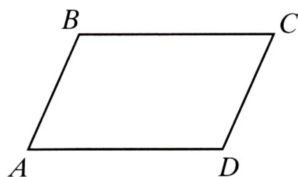


1) $AK = LD = \frac{100-36}{2} = 32\,(\text{cm})$.
2) $AB + CD = BC + AD$, $2AB = 136$,
$AB = 68\,(\text{cm})$.
3) $AB^2 = AK^2 + BK^2$, $68^2 = 32^2 + BK^2$,
$BK^2 = 68^2 - 32^2$, $BK^2 = (68-32)(68+32)$,
$BK = \sqrt{36 \cdot 100}$, $BK = 6 \cdot 10$, $BK = 60\,(\text{cm})$.
Vadinasi, $r = \frac{60}{2} = 30\,(\text{cm})$.

Atsakymas. 30 cm.

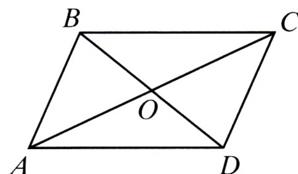
4. Lygiagretainio įstrižainių ilgiai yra 12 ir 14, o jo kraštinių ilgių skirtumas lygus 4. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

Keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, vadinamas lygiagretainiu.



$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,
$ABCD$ — lygiagretainis.

Lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios: $AB = CD$, $BC = AD$.
Lygiagretainio priešingi kampai yra lygūs: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
Lygiagretainio gretimų kampų didumų suma lygi 180°:
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$.
Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos viena kitą dalija pusiau:



$BO = OD$,
$AO = OC$.

Lygiagretainio visų kraštinių ilgių kvadratų suma lygi įstrižainių ilgių kvadratų sumai:
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$,
$2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2$.

Duota: $ABCD$ — lygiagretainis,
$AC = 14$, $BD = 12$, $BC - AB = 4$.
Rasti: P_{ABCD}.
Sprendimas.

1) $2 \cdot (AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2$,

$$AB^2 + BC^2 = \frac{12^2 + 14^2}{2}, \quad AB^2 + BC^2 = 170.$$

2) $BC - AB = 4$.

3) Turime dvi lygtis su dviem nežinomaisiais AB ir BC. Jų reikšmes rasime išsprendę tų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} BC - AB = 4, \\ AB^2 + BC^2 = 170; \end{cases} \quad \begin{cases} BC = 4 + AB, \\ AB^2 + (4 + AB)^2 = 170; \end{cases}$$

$$\begin{cases} BC = 4 + AB, \\ AB^2 + 16 + 8AB + AB^2 = 170; \end{cases} \quad \begin{cases} BC = 4 + AB, \\ AB^2 + 4AB - 77 = 0. \end{cases}$$

Iš antros lygybės apskaičiuojame AB:

$$AB^2 + 4 \cdot AB - 77 = 0, \quad D = 324 = 18^2, \quad AB = \frac{-4 + 18}{2} = 7.$$

(AB reikšmė lygi -11 netinka.)
Randame BC:

$$BC = 4 + AB = 4 + 7 = 11.$$

4) $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (7 + 11) = 2 \cdot 18 = 36$.

Pastaba. Sistemą $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 170 \end{cases}$ galima spręsti taip:

$x^2 - 2xy + y^2 = 16 \Rightarrow 2xy = 154 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 324 \Rightarrow x + y = 18$.
Todėl $x = 11$, $y = 7$.

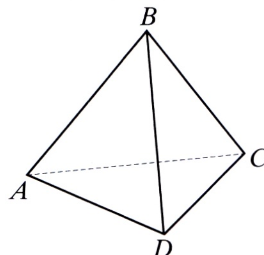
Atsakymas. 36.

5. Tetraedro $ABCD$ visos briaunos lygios 2. Taškai S ir R yra atitinkamai briaunų AC ir BD vidurio taškai.

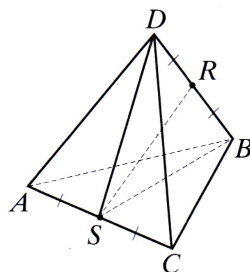
1) Įrodykite, kad $RS \perp BD$.
2) Apskaičiuokite atkarpos RS ilgį.

Trikampė piramidė, kurios visos briaunos yra lygios, vadinama tetraedru.
Tetraedro sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai.

$AB = BC = CD = DA = DB = AC$,
$ABCD$ — tetraedras.



Duota: $ABCD$ — tetraedras, $AB = 2$,
$AS = SC$, $BR = RD$.
Įrodyti: $RS \perp BD$.
Apskaičiuoti: RS.



Sprendimas. Įrodykime, kad $RS \perp BD$.
Nagrinėkime $\triangle DSB$. Įrodykime, kad jis yra lygiašonis: $DS = SB$.
1) DS yra $\triangle ADC$ pusiaukraštinė.
2) BS yra $\triangle ABC$ pusiaukraštinė.
3) Kadangi ADC ir ABC yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, tai jų pusiaukraštinės lygios: $DS = BS$. Vadinasi, $\triangle DSB$ — lygiašonis.
SR yra lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą DB. Vadinasi, SR yra ir $\triangle DBS$ aukštinė. Todėl $SR \perp BD$.

Apskaičiuokime RS ilgį. Jį rasime iš stačiojo $\triangle DSR(\angle R = 90^\circ)$.
Statinis $DR = \frac{DB}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Raskime DS ilgį.
Iš $\triangle ADS(\angle S = 90^\circ,\ AD = 2,\ AS = 1)$:

$$DS^2 = AD^2 - AS^2, \quad DS^2 = 2^2 - 1^2, \quad DS^2 = 3.$$

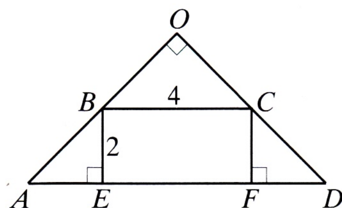
Apskaičiuokime SR. Iš $\triangle DRS$:

$$SR^2 = SD^2 - DR^2, \quad SR^2 = 3 - 1, \quad SR^2 = 2, \quad SR = \sqrt{2}.$$

Atsakymas. $SR = \sqrt{2}$.

6. Lygiašonės trapecijos šoninių kraštinių tęsiniai susikerta stačiu kampu. Apskaičiuokite trapecijos ilgesnįjį pagrindą, jei jos trumpesniojo pagrindo ilgis yra 4, o aukštinė lygi 2.

Duota: $ABCD$ — trapecija,
$AB = DC$, $BC = 4$, $BE = 2$.
Rasti: AD.



Sprendimas. $EF = BC = 4$.
Raskime $AE = FD$. $\triangle AOD$ yra status lygiašonis ($\angle O = 90^\circ$, $AO = OD$).
Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs:

$$\angle A = \angle D = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Vadinasi, ir $\triangle ABE$ ($\triangle DCF$) yra status lygiašonis:

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle E = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

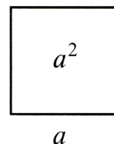
Todėl $AE = BE = 2$. Taigi $AD = 2AE + EF = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.

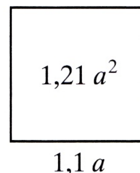
Atsakymas. 8.

7. Kvadrato plotas padidėjo 21%. Keliais procentais padidėjo jo kraštinės ilgis?

> Procentas — tai viena šimtoji $\left(\frac{1}{100}; 0{,}01\right)$ dydžio dalis.
> Sakyti padidėjo 21%, tai tas pats, kas sakyti padidėjo 1,21 karto.

Sprendimas.
Pradinio kvadrato kraštinę pažymėkime a, tada jo plotas yra a^2.
Padidinto kvadrato plotas lygus $1{,}21 \cdot a^2$.
Jo kraštinė





$$\sqrt{1{,}21 \cdot a^2} = 1{,}1 \cdot a.$$

Vadinasi, kraštinė padidėjo 1,1 karto, t. y. 10%.

Atsakymas. 10%.

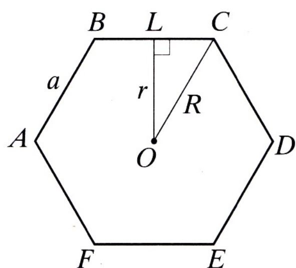
8. Taisyklingojo šešiakampio kraštinės ilgis yra $2\sqrt{3}$ cm. Apie šį šešiakampį apibrėžtas ir į jį įbrėžtas apskritimai. Apskaičiuokite:

a) šešiakampio plotą;

b) įbrėžto apskritimo spindulio ilgį;

c) apibrėžto apie šešiakampį apskritimo spindulio ilgį.

> Šešiakampis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs, vadinamas taisyklinguoju.



> $AB = BC = CD = DE = EF = FA = a$,
> $ABCDEF$ — taisyklingasis šešiakampis,
> $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120°$,
> $OC = a = R$ (apibrėžtinio apskritimo spindulys),
> $OL = \frac{\sqrt{3}}{2}a = r$ (įbrėžtinio apskritimo spindulys),
> $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$.

Sprendimas.

a) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$, a — kraštinės ilgis,
$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 18\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$.

b) $r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$ (cm).

c) $R = a = 2\sqrt{3}$ cm.

Atsakymas. a) $18\sqrt{3}$ cm^2; b) 3 cm; c) $2\sqrt{3}$ cm.

K12. TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

1 variantas

1. a) IV ketvirtis; b) III ketvirtis; c) II ketvirtis.
2. a) $57°$; b) $120°$, $\frac{2}{3}\pi$ rad.
3. a) Lyginė; b) lyginė; c) lyginė.
4. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) 4π.
5. a) 1; b) 1; c) $\sqrt{3}+1$.
7. 2,4.

2 variantas

1. a) $\frac{43\pi}{18}$, I ketvirtis; b) $-\frac{101\pi}{9}$, II ketvirtis; c) $\frac{2\pi}{1125}$, I ketvirtis.
2. a) $36° = \frac{\pi}{5}$, $54° = \frac{3\pi}{10}$, $90° = \frac{\pi}{2}$; b) $\alpha = 1{,}6°$.
3. a) Nelyginė; b) nelyginė; c) lyginė.
4. a) $T = \frac{\pi}{6}$; b) $T = \pi$; c) $T = 3\pi$.
5. a) -1; b) $\frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$; c) -1.
7. 16.

K13. FUNKCIJOS $f(x) = \sin x$ ir $f(x) = \cos x$

1 variantas

1. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; b) $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; c) $x \in \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$.
2. a) $f(x) \in [-9; 9]$; b) $f(x) \in [1; 2]$; c) $f(x) \in [-2\pi; -\pi]$.
3. a) $x = \frac{13}{14}\pi + 2\pi \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi \cdot k, k \in \boldsymbol{Z}$; c) $\varnothing$.
4. a) $x = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot m, m \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \pm\frac{5\pi}{2} + 6\pi \cdot m$, $m \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2} \cdot m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = -\frac{1}{2}$.
5. a) $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; b) $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot k; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
6. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 0; c) $-\frac{\pi}{2}$.
7. a) $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; b) tokių a reikšmių nėra.
8. 10.

2 variantas

1. a) $x \in \boldsymbol{R}$; b) $x \in \left[-1\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right]$; c) $x \in [-\sqrt{5};\ -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};\ \sqrt{5}]$.

2. a) $f(x) \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$; b) $f(x) \in [-2;\ -1]$; c) $f(x) \in \left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

3. a) Tokių x reikšmių nėra; b) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

c) $x = -\frac{15\pi}{4} + 6\pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4. a) $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

c) $x = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} + \pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = -\frac{1}{2}$.

5. a) $x \in \left[-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; b) $x \in (-\pi + 2\pi \cdot n;\ 2\pi \cdot n),\ n \in \boldsymbol{Z}$;

c) $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 4\pi \cdot n;\ \frac{11\pi}{3} + 4\pi \cdot n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}$.

6. a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{5\pi}{12}$.

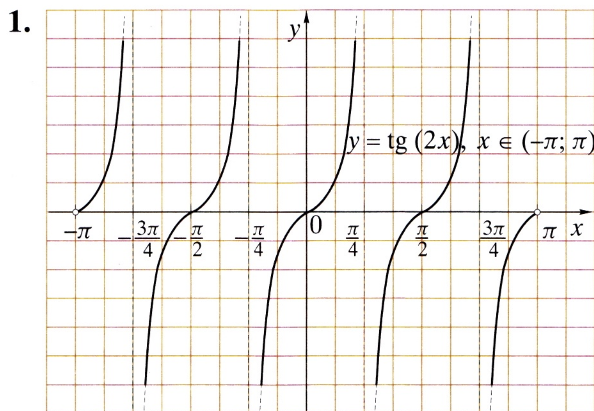
7. a) $b \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$; b) $b \in (-\infty;\ +\infty)$.

8. 322π.

K14. FUNKCIJOS $f(x) = \operatorname{tg} x$ ir $f(x) = \operatorname{ctg} x$

1 variantas

1.



a) D: $\left(-\pi;\ -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$;

b) E: $(-\infty;\ +\infty)$; c) $x \in \left(-\pi + \frac{\pi}{2} \cdot n;\ -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n\right),\ n = 0;\ 1;\ 2;\ 3$;

d) $x \in \left(-\pi;\ -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left(-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$.

2. a) $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; c) $\varnothing$;

d) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi \cdot n,\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot k;\ n, k \in \boldsymbol{Z}$;

e) $x = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

f) $x = \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{11}}{5} + \pi \cdot n,\ x = \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{11}}{5} + \pi \cdot k;\ n, k \in \boldsymbol{Z}$.

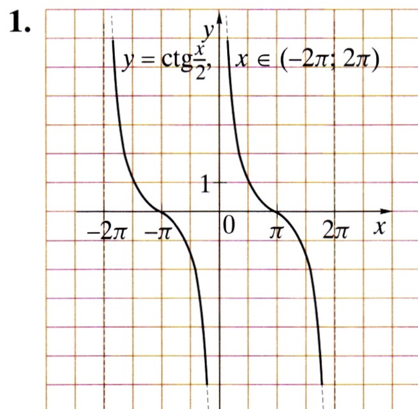
3. a) Didesnė už 0; b) didesnė už 0; c) didesnė už 0.

4. a) $\frac{\pi}{2}$; b) 1; c) $-\frac{7\pi}{6}$.

5. a) $(-11; -9)$; b) $\sqrt{34}$; c) $-\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

2 variantas

1.



a) $x \in (-2\pi; 0) \cup (0; 2\pi)$; b) $y \in (-\infty; +\infty)$;

c) $x \in (-2\pi; -\pi) \cup (0; \pi)$; d) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

2. a) $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; c) $\varnothing$;

d) $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi \cdot n,\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot k;\ n, k \in \boldsymbol{Z}$;

e) $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; f) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3. a) Mažesnė už 0; b) mažesnė už 0; c) mažesnė už 0.

4. a) π; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{13\pi}{18}$.

5. $\overrightarrow{AB}(3; -5)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34}$, $C(-1{,}5; -1)$.

K15. TRIGONOMETRINĖS FORMULĖS

1 variantas

1. a) $-\frac{33}{65}$; b) $-\frac{56}{65}$; c) $-\frac{1}{2}$.

3. a) $2\cos\alpha \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)$; b) $4\sin(4\alpha)\cos(2\alpha)\cos\alpha$; c) $-\sin(2\alpha) \cdot \sin\alpha$.

4. a) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$;

b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$, $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k$; $n, k \in \boldsymbol{Z}$;

c) $x = \frac{\pi}{3} \cdot n$, $x = \frac{\pi}{2} \cdot k$; $n, k \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \boldsymbol{Z}$;

e) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k, k \in \boldsymbol{Z}$.

5. a) π; b) $\frac{\pi}{2}$; c) -30°, 30°.

6. $38\,\text{m}^2$.

2 variantas

1. a) $-\frac{33}{65}$; b) $-\frac{16}{65}$; c) $-\frac{7}{6}$.

3. a) $2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$; b) $4\cos(4\alpha)\cos(2\alpha)\cos\alpha$; c) $\sin(2\alpha)\sin\alpha$.

4. a) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8} \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in \boldsymbol{Z}$;

c) $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} \cdot k$; $n, k \in \boldsymbol{Z}$; d) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$;

e) $x = \pi + 2\pi \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.

5. a) $-\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$; c) -60°, 60°. **6.** $31\,\text{m}^2$.

K16. SKAIČIŲ SEKOS

1 variantas

1. a) $d = -0{,}5$, $a_8 = -2$; b) taip; c) 1,5.

2. a) Aritmetinė progresija; b) nėra nei aritmetinė, nei geometrinė progresija.

3. a) -18; $-14{,}8$; $-11{,}6$; $-8{,}4$; $-5{,}2$; -2; b) 87; c) 7.

4. a) -2; 2; b) 25; c) 6.

5. a) $1{,}(3) = \frac{4}{3}$; b) $\frac{2776}{8325}$.

6. 4, 10, 16; 16, 10, 4.

7. 8.

2 variantas

1. a) $d = 5$, $a_6 = 26$; b) taip; c) 148.
2. a) Aritmetinė progresija; b) geometrinė progresija.
3. a) 5, 2, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{16}{125}$, $\frac{32}{625}$; b) 1000; c) 20.
4. a) -3; 3; b) 55; c) 3.
5. a) $1\frac{2}{9}$; b) $6\frac{125}{999}$.
6. 24, 48, 72 arba 24, 16, 8.
7. 9.

K17. ĮVYKIAI IR TIKIMYBĖS

1 variantas

1. 1) 13, 15, 31, 35, 51, 53; 2) $A\backslash B = \{31, 51\}$, $B\backslash A = \{13, 15, 35\}$, $A\backslash\overline{B} = \{53\}$, $\overline{B}\backslash\overline{A} = \{31, 51\}$, $A \cap B = \{53\}$.
2. a) $A_9^3 = 504$, $C_{10}^7 = 120$; b) 15; c) 24.
3. a) $\frac{1}{7}$; b) $\mathbf{P}(C) = \frac{8}{27}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{4}{9}$; c) $\frac{2}{25}$.
4. a) $\frac{1}{30\,240}$; b) $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{21}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{42}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$; c) 28.
5. $\frac{8}{11}$.

2 variantas

1. 1) 23, 24, 32, 34, 42, 43; 2) $A\backslash B = \{32, 42\}$, $B\backslash A = \{23, 24, 34\}$, $A\backslash\overline{B} = \{43\}$, $\overline{B}\backslash\overline{A} = \{32, 42\}$, $A \cap B = \{43\}$.
2. a) $A_{10}^4 = 5040$, $C_9^7 = 36$; b) 35; c) 20.
3. a) $\frac{1}{7}$; b) 0,941; c) $\frac{1}{2}$.
4. a) $\frac{1}{151\,200}$; b) $\mathbf{P}(A) = \frac{7}{10}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{30}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{12}$; c) 14.
5. $\frac{7}{9}$.

K18. TRIKAMPIAI IR TIESĖS

1 variantas

1. 7,25 cm.
2. $P = 36$, $S = 48$.
3. $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$ cm^2.
4. 11 cm.
5. 40.

6. a) $5\sqrt{3}$ m; b) 10 m, $10\sqrt{3}$ m; c) ne.
7. a) 7,5; b) $x = 5$, $y = 9$.
8. $\frac{2}{3}mn$.
9. $AB = BC = CA = 6$ cm, $AE = BD = CF = 3\sqrt{3}$ cm.

2 variantas

1. 6,5 cm.
2. $P = 42$, $S = 84$.
3. $S = 4\sqrt{2}\sin 105^\circ$ cm^2 $= (2\sqrt{3} + 2)$ cm^2.
4. $3\frac{1}{4}$ cm.
5. 240.
6. $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ m.
7. a) 17,5; b) $x = 9\frac{1}{3}$, $y = 7\frac{5}{7}$.
8. $48\sqrt{6}$ cm^2.
9. $h = 10\sqrt{3}$ cm, $a = 20$ cm.

K19. DAUGIAKAMPIAI. APSKRITIMAS IR SKRITULYS

1 variantas

1. $\frac{6-\pi}{8} \cdot a^2$.
2. 50°.
3. 30 cm.
4. 36.
5. $SR = \sqrt{2}$.
6. 8.
7. 10%.
8. a) $18\sqrt{3}$ cm^2; b) 3 cm; c) $2\sqrt{3}$ cm.

2 variantas

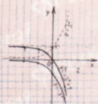
1. $\frac{a^2(9\sqrt{3}-4\pi)}{6}$.
2. 33°.
3. 32 cm.
4. 72.
5. $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.
6. 8 cm, 10 cm.
7. 30%.
8. a) 4 cm; b) $2\sqrt{3}$ cm.



Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

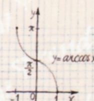
11 KLASĖ
1 dalis



Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

11 KLASĖ
2 dalis



Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

12 KLASĖ
1 dalis

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

12 KLASĖ
2 dalis

Leidinys atitinka ŠMM patvirtintus standartus ir programas.
Leidinys atitinka matematikos vadovėlį.
Visi uždaviniai patikrinti ir perspręsti leidyklos specialistų.

ISBN 9955-680-25-3

